DIDATTICA
OPERATIVA

Beppe Pea

LABORATORIO DI GEOMETRIA

Esperienze geometriche
per il 2° ciclo della scuola elementare
e per l'inizio della scuola media

Strumenti
matematici
per la continuità
elementare
media

DESCA Edizioni

Redazione: Alessia Tinelli
Copertina: disegno di Ezio Pelizzari
Fotocomposizione e stampa: TIPOLITOTAS, Gussago (Brescia)
 DESCA Edizioni, Manerbio (Brescia) - Via Carducci, 30
Tel e Fax: (030) 9938506

BEPPE PEA

LABORATORIO DI GEOMETRIA

Esperienze geometriche per il 2° ciclo della scuola elementare e per l'inizio della scuola media

hanno collaborato:
Fulvio Mercantini, Piera Paderno, Giorgio Putzu, Ebe Valentini, Giovanna Zampatti

DESCA Edizioni

INDICE

1.
IL PERCHE' DI UNA METODOLOGIA

SPAZI INTUITIVI E SPAZI OBIETTIVI

Tutte le nostre esperienze riguardanti lo spazio e tutte le conclusioni cui si perviene hanno la loro origine in certe proprietà che vengono classificate come PROPRIETA' SPAZIALI le quali, diventando note solo attraverso l'esperienza immediata e diretta, non possono essere definite ulteriormente [1] .
Questa *"spazialità"*, che scaturisce con le percezioni sensoriali come una proprietà di queste è perciò un dato intuitivo.
Vengono indicati come *"intuitivi"* tutti i dati della vita percettiva e rappresentativa, e non solo quelli provenienti dall'esperienze ottiche. Quindi alle percezioni ottiche, uditive, tattili e cinestesiche spettano proprietà che vengono chiamate allo stesso modo *spaziali*.
Ma la spazialità proveniente dalle sensazioni tattili è molto diversa dalla spazialità proveniente dalle sensazioni ottiche; un non-vedente dalla nascita conosce solo le prime e non si può fare alcuna rappresentazione delle seconde.
Lo "spazio del tatto" non ha alcuna somiglianza con lo "spazio della vista", e si può affermare che: "**esistono tanti spazi di genere intuitivo per quanti sensi diversi si possiedono**".

Esiste uno spazio non intuitivo ?

- Si consideri un cubo rigido. La sua forma cambia, per il senso della vista, in funzione del lato e della distanza da cui lo si considera, la lunghezza "ottica" dei suoi spigoli è diversa.
  Ma anche attraverso una indagine tattile le parti del cubo possono apparire diverse a seconda di come viene impugnato e di come viene indagato con parti tattili diverse. Nonostante ciò si considera invariata la sua forma cubica, cioè tutti gli spigoli sono lunghi uguali, tutte le facce hanno la stessa forma e la stessa estensione, ecc.
- Si considerino due penne uguali poste una vicina e l'altra lontana rispetto a che guarda. La vista le percepisce diverse (almeno riguardo alle dimensioni), ma nonostante ciò si considerano le due penne uguali.

Di conseguenza, gli oggetti fisici sono in generale NON-intuitivi e lo spazio fisico non è dato in alcun modo dalle percezioni, bensì è una "*costruzione concettuale*".
Agli oggetti fisici non si può attribuire la spazialità intuitiva che si conosce dalle sensazioni visive, uditive, tattili, cinestesiche,... ma soltanto un ordinamento di genere non-intuitivo che viene chiamato *SPAZIO OBIETTIVO* ed è concepito con-cettualmente.
L'educazione spaziale, prevista nei programmi ministeriali e riguardante il 1° ciclo della scuola elementare ha come obiettivo portare il bambino dalla fase dello spazio intuitivo alla fase dello spazio oggettivo, cioè allo spazio non legato solo alla osservazione, ma frutto di una una costruzione concettuale.

Occorre distinguere bene i due tipi di spazi perché la rappresentazione delle relazioni concettuali non-intuitive avviene, obbligatoriamente, con rappresentanti intuitivi, ma si tratta sempre di "*rappresentanti*" sensibili del concetto fisico di spazio.

Per gli educatori risulta particolarmente importante capire la genesi dello spazio obiettivo partendo dai dati intuitivi degli spazi soggetivi.

Gli spazi intuitivi sono dissimili l'uno dall'altro e sono inconfrontabili, ma, in base all'esperienza, sono

[1] Queste considerazioni ed altre che seguiranno in questo paragrafo, sono tratte dal pensiero di MORITZ SCHLICK e sono state pubblicate in un volumetto dal titolo: *SPAZIO E TEMPO NELLA FISICA CONTEMPORANEA Una introduzione alla teoria della relatività e della gravitazione,* BIBLIOPOLIS Napoli , 1983. Questo libro è una traduzione della 4^ edizione di: *RAUM UND ZEIT IN DER GEGENWÄRTIGEN PHYSIK* pubblicato nel 1922.

associati l'uno all'altro in modo assolutamente determinato.
Le esperienze tattili sono indipendenti da quelle ottiche, ma fra di loro c'è una corrispondenza. Infatti, se una indagine tattile comunica un complesso di informazioni riassumibile in "forma cubica", si può procurare anche al senso della vista un complesso di sensazioni che viene designato con il nome "forma cubica".

L'impressione ottica è diversa da quella tattile, ma l'esperienza insegna che le due procedono in maniera non sconnessa fra loro.
Per portare il bambino verso gli spazi obiettivi non si deve far vivere loro solo le esperienze che portano agli spazi intuitivi, percettivi (queste esperienze il bambino le vive istante dopo istante), ma *è necessario far scoprire* loro *i legami esistenti fra tutte queste percezioni spaziali diverse*.

CAMBIAMENTI SPAZIALI

Attraverso i sensi il bambino si rende conto che le impressioni che riceve sia dall'esterno sia dall'interno sono soggette a cambiamento, ma non tutte. Infatti mentre alcune impressioni si modificano altre, contemporaneamente, rimangono invariate. Quelle che colpiscono di più sono le impressioni che cambiano ed il bambino su queste pone la sua attenzione.[2].
Però se una cartina tornasole ci mostra un cambiamento cromatico percepibile attraverso il senso della vista, la stessa cartina successivamente spostata ci mostra un cambiamento di posizione percepibile sempre attraverso il senso della vista. Si formano allora due classi di trasformazioni:

- quella dove le impressioni sono cambiate perché la fonte che le produceva ha subito un cambiamento di stato;
- quella dove le impressioni sono cambiate perché la fonte ha subito uno spostamento.

Il Poincaré esemplifica tale classificazione nel seguente modo:
«Una sfera viene cromaticamente suddivisa in due emisferi est-ovest, uno blu e l'altro rosso. La sfera viene fatta ruotare, davanti agli occhi, attorno al suo asse in modo da mostrare prima l'emisfero blu e poi l'emisfero rosso.
Un contenitore trasparente di forma sferica contiene un liquido blu. Attraverso una reazione chimica si ottiene che il liquido da blu diventi rosso.
Che cosa induce a classificare il 1° cambiamento tra gli spostamenti mentre il 2° viene classificato fra i cambiamenti di stato?
La risposta è legata ai cambiamenti di posizione che l'osservatore può compiere:

- nel 1° caso basta girare attorno alla sfera per avere di nuovo l'impressione del colore blu;
- nel 2° caso qualunque spostamento faccia l'osservatore non è possibile avere di nuovo l'impressione del blu».

Altro esempio:
«Un uomo è perfettamente immobile, non può muovere nemmeno i muscoli dell'occhio. Un oggetto che si sposta davanti al suo occhio produce la percezione di una trasformazione posizionale perché la sensazione, che veniva portata dalla fibra nervosa collocata al centro della sua retina, è sostituita da un'altra sensazione che viene portata da un'altra fibra collocata sul bordo della retina stessa.
Sensazioni portate da nervi diversi appaiono qualitativamente diverse. Potrebbe trattarsi di due immagini diverse: che cosa porta a pensare che si tratta della stessa immagine che si è spostata?
Si permetta di seguire con l'occhio l'oggetto che si sposta. L'uomo mantiene l'immagine al centro della retina tramite movimenti volontari e quindi il tutto viene "sentito" attraverso attività muscolari.
Quindi, come nell'esempio precedente, *un cambiamento di posizione viene classificato tale quando è possibile annullare la percezione della trasformazione con attività di tipo cinestesico*».

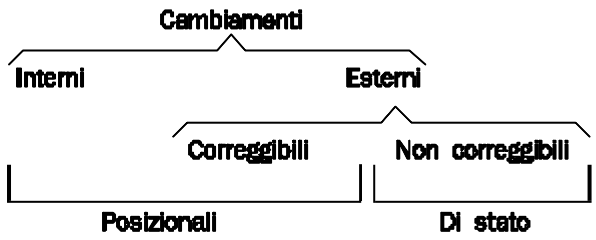
Riassumendo si può giungere alla seguente classificazione dei cambiamenti:

1) **Cambiamenti interni**: sono dipendenti dalla nostra volontà e sono sempre accompagnati da sensazioni muscolari;

2) **Cambiamenti esterni**: sono indipendenti dalla nostra volontà e non sono accompagnati da sensazioni muscolari. Questi cambiamenti si possono poi suddividere in altre due classi:
a) **Cambiamenti esterni correggibili** (sul piano percettivo) tramite un cambiamento interno;
b) **Cambiamenti esterni non correggibili** con un cambiamento interno.

e, collegando questa classificazione alle conoscenze spaziali, si ha:

[2] Per quanto esposto in questo paragrafo si fa riferimento a quanto scritto da JULES HENRI POINCARÉ nelle sue pubblicazioni e, in particolare in:
LA SCIENZA E L'IPOTESI, EDIZIONI DEDALO, Bari , 1989;
SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA, EDITRICE LA SCUOLA, Brescia, 1990



Si consideri ora la seguente situazione:

«Un bambino osserva, attraverso il movimento oculare, un pallone che si sposta da un punto "A" ad un punto "B". Lo stesso spostamento viene ripetuto non più con un pallone, ma con una bottiglia. Le due percezioni visive sono diverse, infatti non c'è rapporto fra l'impressione di un pallone e quella di una bottiglia, eppure il bambino questi cambiamenti esterni li relaziona e li considera come appartenenti alla stessa classe di cambiamenti. **Ciò è dovuto al fatto che sono stati corretti entrambi con lo stesso cambiamento interno e quindi hanno prodotto le stesse sensazioni muscolari»**.

Analogamente:

«Quando una madre, che è in rapporto di contatto fisico con il figlio, si allontana, crea, per il figlio, un cambiamento esterno. Il figlio può correggere tale cambiamento e rimanere a contatto della madre con proprie attività cinestesiche. Se al posto della madre ci fosse stato il fratello le impressioni visive ed emotive sarebbero state diverse ma le sensazioni muscolari, dovute alle attività cinestesiche praticate per evitare il cambiamento, sarebbero state identiche».

Si può concludere che: **Senza le attività cinestesi-che e quindi senza le sensazioni muscolari è impossibile distinguere i cambiamenti di stato dai cambiamenti di posizione nello spazio. Un essere che non potesse muoversi non potrebbe mai arrivare ad avere una concezione spaziale, anche se le sue sensazioni fossero variabili e se gli oggetti che lo circondano fossero mobili.**

Questa conclusione ha delle ripercussioni sul piano metodologico per gli insegnanti che devono educare i bambini alle concezioni spaziali prima e alla geometria poi.
Non si può educare un bambino alla concezione spaziale facendolo rimanere fermo; più frequenti sono le attività cinestesiche e più queste interessano lintera struttura corporea, maggiore è la probabilità di giungere ad un atto cognitivo sul versante delle concezioni spaziali. Quindi non si può insegnare ai bambini le concezioni spaziali:

- Spiegando verbalmente lo spazio;
- Mostrando immagini relative ad esperienze spaziali fatte da altri;
- Facendo disegnare o completare delle schede, perché il disegno per il bambino è un momento prettamente linguistico; con il disegno il bambino esprime ciò che ha già capito e interiorizzato. Il disegno può essere usato dall'insegnante come momento di verifica per verificare ciò che il bambino ha capito, oppure come momento di sistematizzazione o di approfondimento di concetti appresi attraverso attività motorie e psicomotorie.

Occorre rendersi conto che tutti i sensi sono importanti per acquisire conoscenze spaziali, ma senza l'uso dell'intero corpo nelle sue attività cinestesiche difficilmente il bambino giunge a concezioni spaziali obiettive.

QUESTIONI TOPOLOGICHE

Giungere alla costruzione concettuale dello spazio obiettivo significa:

- saper andare oltre le impressioni sensoriali (gli spigoli di un oggetto di forma cubica appaiono di lunghezza diversa ma vengono concepiti di uguale misura);
- saper riconoscere la posizione, le differenze di posizione e i cambiamenti di posizione di oggetti indipendentemente dalla apparenza degli oggetti stessi.

La posizione degli oggetti non è una proprietà intrinseca degli oggetti, ma è un valore relazionale (un oggetto non "*è davanti*" ma "*è davanti a ...*") e quindi *per concepire una posizione è necessario saper strutturare lo spazio rispetto ad un riferimento*.
Analizzando la frase:

"Il pallone si trova davanti a Paolo"

risulta:
Che cosa esprime? Una posizione (si trova davanti);
di chi è la posizione ? Del pallone;
rispetto a quale riferimento è la posizione? Rispetto a Paolo.

Il bambino nelle prime fasi delle conoscenze posizionali non ha il concetto di riferimento ed esprime un valore posizionale ubbidendo a stimoli derivanti dall'apparenza sensoriale (*avere davanti* è equivalente a *vedere; avere dietro* è equivalente a *non poter vedere*).
Questi bambini utilizzano le parole davanti-dietro, sopra-sotto, vicino-lontano,... ma l'insegnante deve capire che non fanno parte di una concezione obiettiva

dello spazio; sono termini che esprimono un mondo ancora legato alle apparenze sensoriali.
L'insegnante deve lavorare per portare il bambino verso una concezione posizionale più obiettiva, cioè legata alla rappresentazione mentale del riferimento.
Il primo riferimento che il bambino scopre è il proprio corpo.

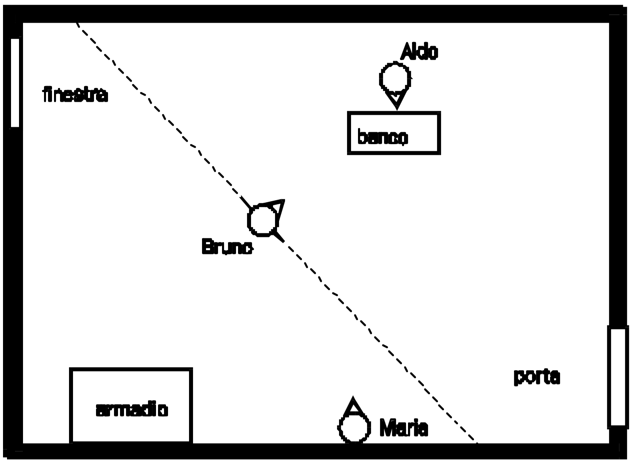


fig. 1

Nella figura, Bruno, allargando le braccia, proietta il proprio corpo nello spazio e lo divide in due parti: una davanti a Bruno e l'altra dietro. Avendo, in tal modo, diviso lo spazio rispetto a se stesso, può posizionare ciò che è presente nella stanza e quindi: Aldo, la porta e il banco sono posizionati DAVANTI a Bruno, mentre Maria, l'armadio e la finestra sono posizionati DIETRO a Bruno.

Per giungere ad interpretare il proprio corpo come riferimento per posizionare ciò che sta fuori dal corpo stesso, è necessario che il bambino, attraverso attività psicomotorie, passi da una percezione ad una concezione del proprio corpo sia in senso globale sia in senso segmentario.

La concezione corporea non è un fatto fisico ma concettuale.

Quando il bambino riesce a concepire il proprio corpo come strutturato in parti (proprio perché strutturato, le parti sono in relazione con il tutto e con le altre parti), è pronto ad utilizzare questa concezione proiettandola fuori di sé riuscendo così a ottenere una partizione dello spazio.

Ad esempio: attraverso attività psicomotorie il bambino ha sensazioni corrette ma diverse tra il davanti e il dietro del proprio corpo. Queste sensazioni sono diverse ma relazionabili e, ad un certo punto, la parte davanti del corpo verrà messa in corrispondenza con la parte dietro. Ciò significa strutturare il corpo come mentalmente suddiviso in due parti, ma l'elemento separatore delle due parti non è una parte del corpo ma è una concezione mentale chiamata "*piano corporeo*". Nel caso del DAVANTI-DIETRO il piano corporeo viene detto "*TRASVERSALE*". A questo punto il piano corporeo viene, dal soggetto, proiettato nello spazio che risulta così suddiviso in due parti identificate con il davanti-dietro rispetto al soggetto. Ogni oggetto che si viene a trovare in questo spazio assume una posizione rispetto al soggetto a seconda della parte di spazio in cui si trova.
Se il bambino allarga le braccia per capire se il pallone è davanti o dietro a lui, compie un atto di proiezione di se stesso nello spazio: a questo punto, anche se il bambino gira la testa, il davanti-dietro non cambia perché non è la vista che lo determina ma il suo piano corporeo.
Analogo procedimento avviene per il piano corporeo longitudinale che permette, proiettato nello spazio, di identificare le due parti DESTRA-SINISTRA.

Non esiste concezione spaziale se prima non c'è concezione di sé ed è per tale motivo che le attività psicomotorie sono indispensabili per giungere alla conquista della spazio obiettivo.
Ancora una volta le attività che non interessano l'intero corpo non sono le più idonee per educare il bambino alla concezione dello spazio obiettivo.

TRASFORMAZIONI POSIZIONALI E DIREZIONALI

Alcune sensazioni, come quelle visiva e muscolare, sono legate ai cambiamenti di posizione che l'individuo può effettuare nello spazio. Altre sensazioni, come quelle gustativa e olfattiva, non hanno questo stretto legame con i cambiamenti posizionali, mentre ci comunicano molte più informazioni sugli stati e sui cambiamenti di stato.

Si consideri il cambiamento di posizione di un braccio. La contrazione del bicipite provoca un movimento del braccio lungo una determinata direzione, ma questa direzione nello spazio varia in funzione della posizione del corpo.
Il senso della direzione non è quindi parte integrante delle sensazioni muscolari perché può variare senza che le sensazioni muscolari varino. Questo non significa che la sensazione della direzione sia associata a qualche cosa di non definibile. La percezione di una direzione proviene da sensazioni diverse associate le une alle altre: basta una di queste sensazioni per attivare le altre seguendo le normali leggi delle associazioni d'idee.

Collocarsi sulla mattonella di un pavimento è assumere una posizione spaziale, ma su questa mattonella ci si può mettere in tanti modi diversi, ed in particolare ci si può direzionare verso un oggetto piuttosto che verso un altro.
Il corpo, oltre che posizionarsi, si direziona nello spazio, cosicché un successivo cambiamento di posizione inizia lungo la direzione assunta.

Andare avanti non significa assumere una posizione e nemmeno assumere una direzione, ma vuol dire cambiare la posizione senza cambiare la direzione assunta.

Attraverso le attività cinestesiche, che permettono di cambiare posizione, il bambino fa esperienze prima sull'assunzione di una direzione e poi sul percorrere o no la direzione assunta. I valori direzionali hanno dunque a che fare con le trasformazioni provenienti da operazioni compiute nello spazio.
Il bambino apprende meglio i valori direzionali quando viene posto di fronte a problemi che riguardano i cambiamenti o non cambiamenti della direzionalità espressa attraverso il proprio corpo.

L'educazione spaziale è ancora più efficace quando oltre che lavorare con i cambiamenti si lavora con le trasformazioni, cioè con i cambiamenti (varianze) e con i non cambiamenti (invarianze) spaziali.
I bambini quando hanno maturato i piani corporei (almeno quello trasversale e quello longitudinale) riescono a concepire il proprio corpo come riferimento per collocare ciò che si trova nello spazio, ma riescono anche a concepire il proprio corpo come indicatore di direzione nello spazio.

Tra le tante operazioni che si possono fare con il proprio corpo ci sono quelle che riguardano i valori posizionali ed i valori direzionali visti contemporaneamente. Partendo dalla situazione disegnata nella figura sottostante:

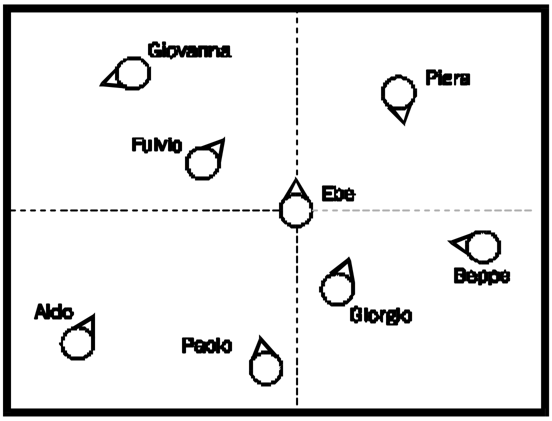


fig. 2

si possono avere alcune trasformazioni, come ad esempio:

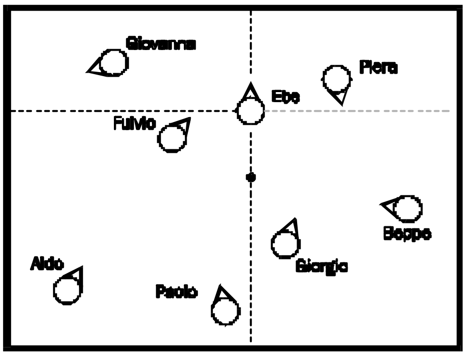


fig. 3

Cambiamento posizionale e mantenimento direzionale. Ebe, spostandosi in avanti, ha cambiato la posizione ma non la direzione del suo corpo. Rispetto al davanti-dietro ci sono stati dei cambiamenti (Fulvio prima era davanti, ora è dietro Ebe) mentre rispetto alla destra-sinistra non ci sono stati cambiamenti.

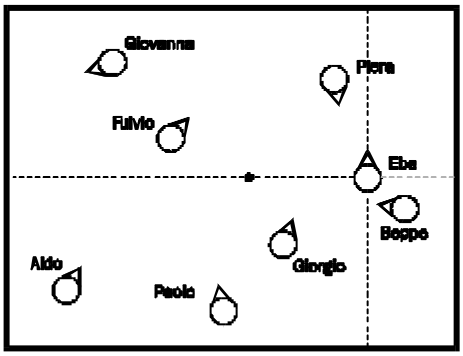


fig. 4

Altro tipo di cambiamento posizionale e di mantenimento direzionale. Ebe, spostandosi lateralmente, ha cambiato la posizione ma non la direzione del suo corpo. Rispetto alla destra-sinistra ci sono stati dei cambiamenti (Giorgio e Piera prima erano a destra, ora sono a sinistra di Ebe) mentre rispetto al davanti-dietro non ci sono stati cambiamenti.

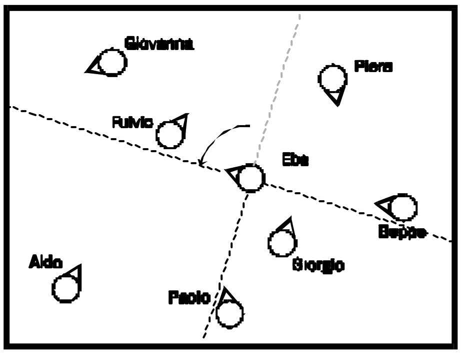


fig. 5

Mantenimento posizionale e cambiamento direzionale. Ebe, ruotando attorno al suo asse corporeo, non ha cambiato la posizione ma ha cambiato la direzione del suo corpo. Ci sono stati sia cambiamenti rispetto al davanti-dietro, sia cambiamenti rispetto alla destra-sinistra.

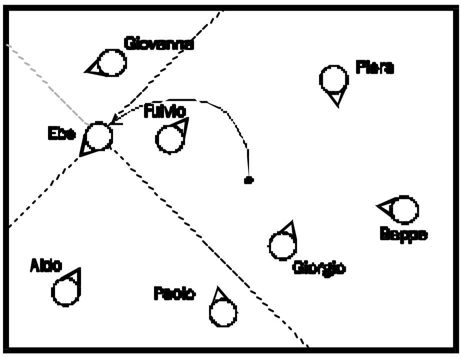


fig. 6

Cambiamento posizionale e cambiamento direzionale. Ebe, facendo un percorso curvilineo, ha modificato contemporaneamente la sua posizione e la sua direzione. Ci sono stati sia cambiamenti rispetto al davanti-dietro, sia cambiamenti rispetto alla destra-sinistra.

Padroneggiare le azioni in modo da risolvere problemi riguardanti contemporaneamente le posizioni e le direzioni, è una premessa indispensabile per iniziare a fare la geometria.[3]

Si vedranno ora alcuni esempi, tratti dalla vita quotidiana, di trasformazioni posizionali e direzionali.

	TRASFORMAZIONI		
	POSIZIONALE NON DIREZIONALE	DIREZIONALE NON POSIZIONALE	SIA POSIZIONALE SIA DIREZIONALE
TRENO	nei tragitti rettilinei	IMPOSSIBILE: un treno non può ruotare attorno al proprio asse	nei tragitti curvilinei
MEZZO CINGOLATO	quando si sposta in avanti o indietro	quando muovendo un cingolo in un verso e l'altro nel verso opposto ruota attorno al proprio asse	quando curva attorno ad un ostacolo
ASCENSORE	quando da un piano sale o scende per raggiungere un altro piano	IMPOSSIBILE	IMPOSSIBILE
VENTILATORE FISSO	IMPOSSIBILE	quando viene messo in azione	IMPOSSIBILE
PESO DEL PENDOLO	IMPOSSIBILE	IMPOSSIBILE	quando oscilla appeso al filo che lo regge
TARTARUGA "LOGO"	quando vengono dati i comandi avanti o indietro	quando vengono dati i comandi di ruotare a destra o a sinistra	IMPOSSIBILE

Altre realtà che possono essere analizzate, utilizzando lo strumento delle trasformazioni, possono essere le seguenti: la pattinatrice mentre compie un esercizio, il bambino quando compie un percorso seguendo il bordo di una aiuola, il bambino quando sale una rampa di scale, ...

[3] Per ulteriori approfondimenti si veda il libro: Beppe Pea, *LABORATORIO DI TOPOLOGIA esperienze topologiche nel primo ciclo elementare*, EMME EDIZIONI PETRINI JUNIOR , TORINO

2.
PRIMI PASSI VERSO LA GEOMETRIA

ENTI PRIMITIVI

Quando il bambino possiede i concetti spazio-temporali che gli consentono di capire sé e gli altri rispetto ai valori posizionali, direzionali e i loro cambiamenti nel tempo (si sa collocare e direzionare e sa cogliere le posizioni e le direzioni degli altri), è il momento di passare alle prime entità geometriche.

La geometria tratta enti e operazioni sugli enti che non appartengono al mondo tangibile, e quindi è una disciplina formale. Gli enti geometrici, essendo dei concetti, possono essere compresi se vengono ricondotti ad altri concetti precedenti (anche servendosi delle definizioni) e questi, a loro volta, saranno ricondotti a concetti ancora precedenti.
Si innesca una catena che porta a vedere le entità geometriche come derivanti da altre entità geometriche fino a quando si arriva ad enti che non si possono derivare da altri. Questi enti sono detti PRIMITIVI e non possono essere dati mediante una definizione.

Gli enti geometrici primitivi, cioè quegli enti che l'insegnante non può definire ma che devono far parte del patrimonio dei bambini, sono: lo SPAZIO, il PIANO, la LINEA, il PUNTO, ecc.

Per l'insegnante nasce il problema del come far maturare nel bambino questi enti senza poterli definire. Questo problema viene risolto attraverso **il lavoro sulle concezioni spazio-temporali**, lavoro previsto nel 1° ciclo della scuola elementare.

Piano

Il bambino, attraverso esperienze compiute muovendosi, giocando nel cortile, sul pavimento di casa, in palestra, nel giardino, nell'aula, ... comincia a scoprire delle relazioni fra sé e l'ambiente, fra gli oggetti e l'ambiente e, quindi, incomincia a relazionare fra loro gli ambienti in funzione della possibilità di muoversi e di giocare. Arrivato a questa capacità relazionale, il bambino scopre l'analogia tra il pavimento di una stanza, il pavimento di una palestra, il prato, il cortile, ecc., scopre cioè l'attributo comune a queste realtà diverse.
Il momento manipolatorio amplierà tale conquista ed anche il ripiano del banco, la superficie della lavagna, il geopiano, ecc. saranno relazionati alle superfici del vissuto corporeo. Analogamente, a livello grafico, verranno utilizzati il quaderno, il foglio, ecc.
Questa relazione permette al bambino di usare il banco oppure un foglio per rappresentare le esperienze vissute a livello corporeo.
Il concetto unificante le diverse realtà è quello di PIANO ed è opportuno evidenziarlo anche verbalmente, quindi l'insegnante proporrà consegne del tipo:
- posizionati sul piano del pavimento;
- disegna la palla sul piano della lavagna;
- metti la gomma sul piano del banco.

Punto

Si arriva alla conquista del concetto di PUNTO del piano lavorando sulle posizioni.
Quando il bambino è capace di rappresentarsi mentalmente il pavimento di una stanza come piano, allora la sua *posizione* diventa un *punto* del piano.
In altre parole, occorre sviluppare nel bambino le abilità posizionali (cogliere, riconoscere, rappresentare la propria e l'altrui posizione rispetto a dei riferimenti) per maturare il concetto di punto geometrico.
Allora:
- assumere una posizione sul pavimento della stanza;
- posizionare opportunamente un soldatino sul banco;
- posizionare un disegno sul foglio;
- incollare una figurina in una determinata posizione del foglio;
- fare una crocetta in una particolare posizione della lavagna;
- posizionare le pedine della dama sulla scacchiera;

sono tutte esperienze che presentano analogie e portano ad un unico concetto geometrico: il PUNTO del piano.

Il punto geometrico non è un fatto fisico ma è un collocamento spaziale. Disegnare un punto significa indicare una collocazione, quindi il grafismo di tale punto è un mero significante.

Linea

I valori posizionali sono esprimibili e si possono pensare in un ambito statico. La realtà topologica ha però bisogno anche di valori dinamici, valori che permettono di descrivere le variazioni di posizione nel tempo. Una corretta interpretazione della realtà può avvenire solo attraverso le trasformazioni di posizione.

Per passare da una posizione ad un'altra, il bambino compie un percorso (assume via via tante posizioni intermedie). Analogamente, se sposta un soldatino da una posizione all'altra sul banco, gli fa compiere un percorso. Se un pennarello, puntato in una determinata posizione del foglio, viene spostato in un'altra posizione, compie un percorso di cui rimane traccia.
Tutti i percorsi comunque effettuati a livello corporeo, manipolatorio e grafico concorrono a creare il concetto geometrico di LINEA.

Per dare un'immagine della linea è opportuno che tutti i percorsi vengano rimarcati con corde, con rappresentazioni grafiche, con l'evidenziazione di tutte le posizioni intermedie via via assunte.
Se un aereo attraversa il cielo senza lasciare scia, il bambino coglie il cambiamento di posizione ma non relaziona tutte le posizioni assunte (non coglie il percorso come linea). Viceversa, se l'aereo lascia dietro di sé una scia di condensa, il bambino identifica tale scia con il percorso fatto, cioè con la linea.

Come già detto nella premessa, i percorsi, quando vengono visti come trasformazioni di posizioni, sono legati alla direzionalità, quindi:
- assumere una posizione nello spazio è un fatto statico relazionale legato al concetto di punto;
- assumere una posizione contemporaneamente ad una direzione significa prevedere degli spostamenti che presuppongono una visione dinamica, trasformazionale delle posizioni nello spazio.

ESEMPI ED ESERCIZI

Le linee

Il concetto di linea ha le sue origini nella pratica spaziale dei percorsi, perciò degli esercizi opportuni possono essere i seguenti:

• Mettere ostacoli diversi per terra; il bambino effettua un percorso eseguendo dei comandi.
• Un compagno rappresenta il percorso alla lavagna evidenziando la corrispondenza tra il vissuto e la sua rappresentazione grafica.

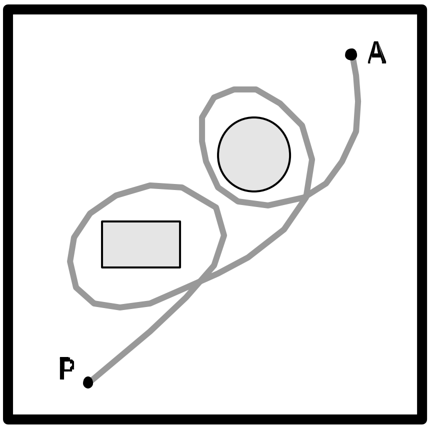
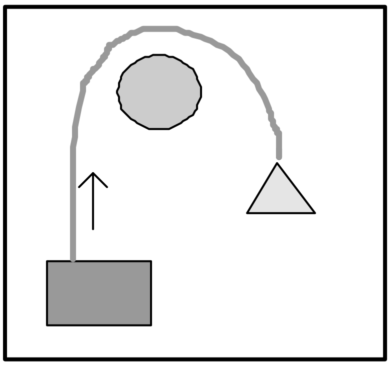


fig. 7

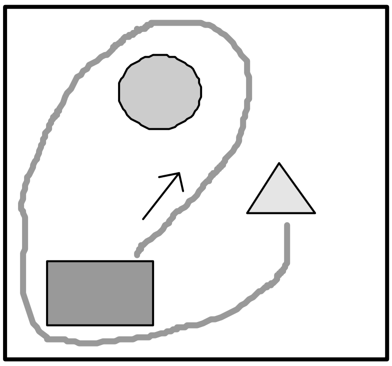
Nel caso rappresentato, il bambino deve compiere un percorso, partendo da una posizione "P" ed arrivando ad una posizione "A" della stanza, aggirando gli ostacoli a sinistra.

Dopo aver strutturato lo spazio con del materiale (vedi figure seguenti), un bambino effettua dei percorsi diversi partendo sempre dalla forma rettangolare ed arrivando a quella triangolare; gli altri bambini li rappresentano su scheda. Si analizzano poi i percorsi e si confrontano.

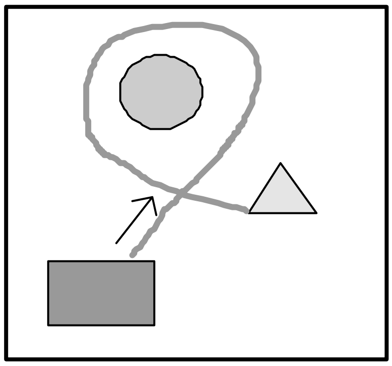
Percorsi APERTI



SEMPLICE con aggira-
mento del tondo a destra.

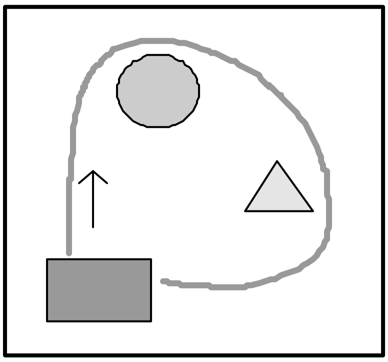


SEMPLICE con aggiramento del tondo a sinistra.

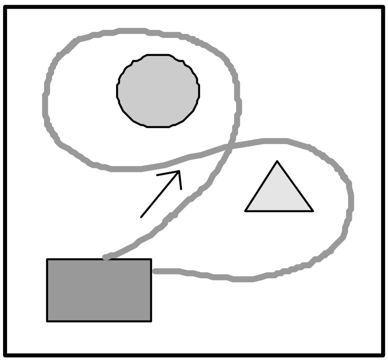


INTRECCIATO con aggiramento del tondo a sinistra.

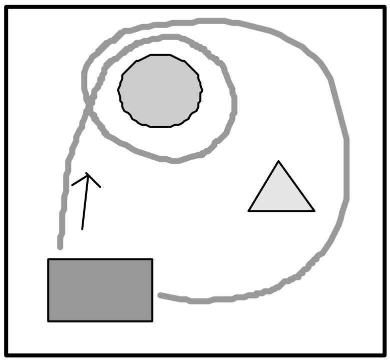
Percorsi CHIUSI



SEMPLICE con aggiramento di entrambe le forme a destra.



INTRECCIATO con aggira-
mento delle forme a sinistra una e a destra l'altra.



INTRECCIATO con aggira-
mento di entrambe le forme a destra.

Analizzando i percorsi si introduce la terminologia, in funzione delle differenze:

- **linea aperta:** percorso aperto, *quando la posizione di partenza non coincide con quella di arrivo*;

- **linea chiusa:** percorso chiuso, *quando la posizione di partenza coincide con quella di arrivo*;

- **linea semplice:** percorso semplice, *quando durante il percorso non si ripassa mai per una posizione già attraversata*;

- **linea intrecciata:** percorso intrecciato, *quando durante il percorso si ripassa per almeno una posizione già attraversata*.

E' preferibile introdurre il lavoro partendo da percorsi eseguiti dall'insegnante. Il bambino ha una scheda nella quale riproduce i percorsi. Successivamente gli si può chiedere di effettuare percorsi richiesti utilizzando la terminologia appropriata.

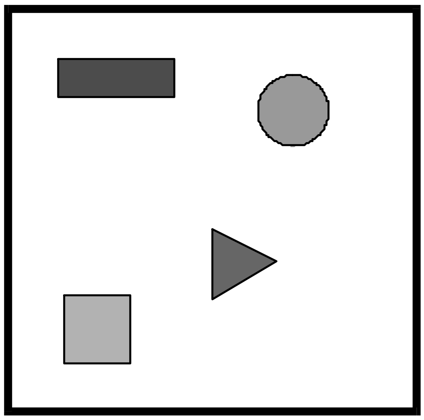


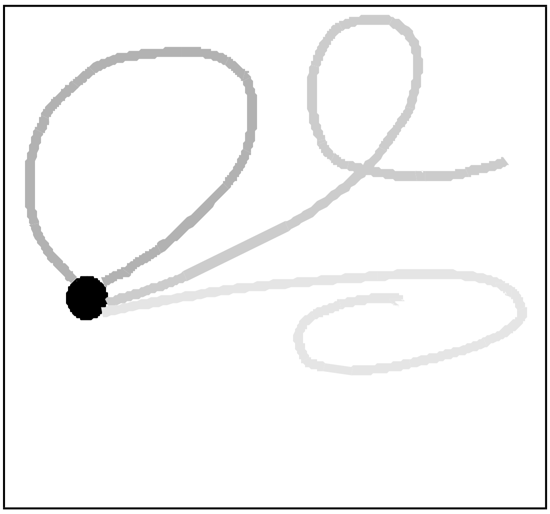
fig. 8

- Partendo dalla forma quadrata fai un percorso semplice aperto, fino al rettangolo, che aggiri le altre forme a destra.
- Partendo dalla forma tonda esegui un percorso semplice chiuso che racchiuda due forme.
- Partendo dalla forma triangolare esegui un percorso aperto intrecciato, fino al tondo, che non aggiri le altre forme.
- Partendo dalla forma rettangolare esegui un percorso chiuso intrecciato che includa il triangolo nell'intreccio e lasci il tondo all'esterno.

Analoghi esercizi sui percorsi possono essere proposti con l'aggiunta di problemi di lateralizzazione, come ad esempio:

- Partendo dalla forma quadrata esegui un percorso semplice aperto, curvando sempre a sinistra, fino a raggiungere la forma rettangolare.

Per le schede grafiche può risultare semplice ed efficace l'uso dei colori per esprimere i tipi di percorsi:



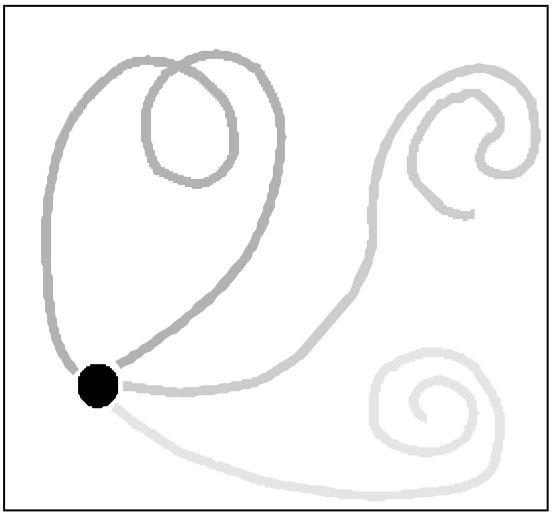
• Colora di rosso il percorso aperto semplice.

• Colora di blu il percorso aperto intrecciato.

• Colora di verde il percorso chiuso semplice.

• Traccia con il colore viola un percorso intrecciato chiuso.

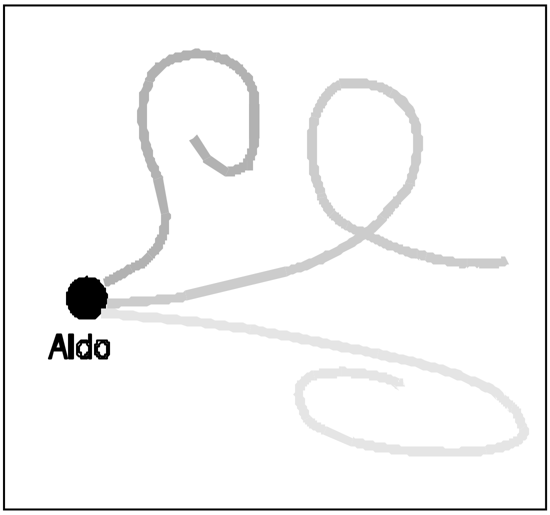
fig.9



• Tra i percorsi aperti semplici individua quello in cui la direzione cambia curvando in parte a destra e in parte a sinistra.

• Di questo percorso colora di rosso il tratto con curvatura a sinistra e di blu quello con curvatura a destra.

fig. 10



• Colora di rosso il percorso dove Aldo curva sempre a sinistra.

• Fai una crocetta nella casella che indica il tipo di percorso fatto da Aldo:

	Semplice	Intrecciato
Aperto		
Chiuso		

fig. 11

Un'altra serie di esercizi può essere del tipo descritto nella figura sottostante:

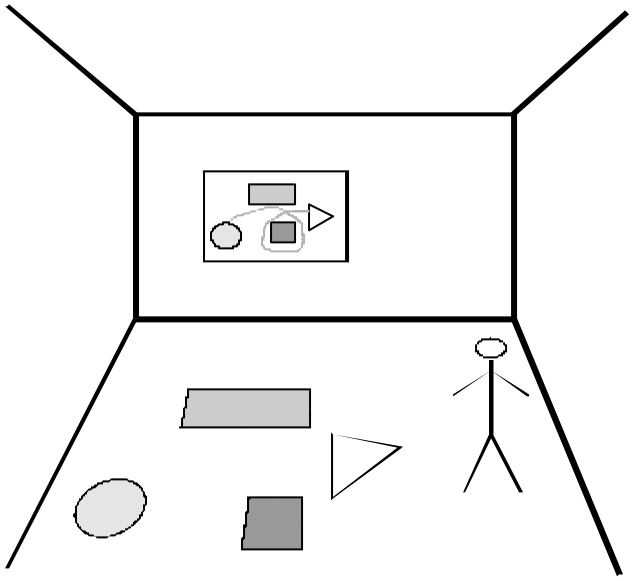


fig. 12

Si procede nel senso inverso: dalla rappresentazione grafica alla esecuzione di un percorso. Alla fine il bambino deve dire che tipo di percorso ha fatto.

Un'analisi dimensionale della linea porta a concludere che:

La linea geometrica ha una sola dimensione (la lunghezza) perché i percorsi non hanno spessori, non hanno aree, sono solo lunghi.

I concetti relativi allo spazio che il bambino ha acquisito attraverso il proprio vissuto sono di natura topologica. Compito dell' insegnante è di fare evolvere tali con-cetti affinché acquistino una valenza geometrica.

Il piano e suoi punti

Quando il bambino:

- fa un percorso in una stanza, il pavimento è il luogo entro il quale va collocato il percorso;
- traccia un percorso fatto, il foglio è il luogo dove collocare il tracciato;
- rappresenta con elastici un percorso, è il geopiano l'ambito nel quale lavorare;
- .....

In questo modo il bambino fa esperienze dirette che rendono il pavimento, il foglio, il geopiano, la lavagna,... entità diverse ma assimilabili fra di loro.
E' proprio questa identificazione che fornisce le prime informazioni sul concetto di PIANO GEOMETRICO.
Analogamente, la posizione assunta sul pavimento di una stanza, i segni posti sul foglio, sulla lavagna, sul geopiano,... (scrittura di tale posizione) non sono altro che le esperienze capaci di dare il concetto di PUNTO di un piano.
In tal modo il piano viene assimilato all'insieme delle posizioni (punti) che si possono assumere.
Un'analisi dimensionale relativa ai punti porta alle seguenti conclusioni:

Il punto geometrico non ha dimensioni in quanto le posizioni non hanno dimensioni, essendo delle collocazioni.

Essendo l'esperienza del bambino legata alle posizioni che può assumere in un luogo finito e limitato, il piano verrà concepito come limitato e con un confine, oltre il quale il piano non c'è più.
L'illimitatezza del piano euclideo, gli enti che non iniziano e non terminano, l'infinito dimensionale, ... non fanno parte dei concetti provenienti dall'esperienza diretta del bambino. Pertanto, si partirà con i piani e con gli enti delle geometrie finite e limitate, solo successivamente e per induzione si arriverà ai piani illimitati di tipo euclideo.

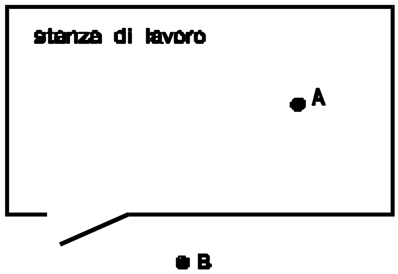


fig. 13

Se il piano di lavoro psicomotorio è il pavimento della stanza, la posizione "A" appartiene a tale piano, mentre la posizione "B" non ha nulla a che vedere col piano e quindi non entrerà nel discorso geometrico riferito a quel piano.

PRIMI ENTI DERIVATI

Partendo dagli enti primitivi e aggiungendo nuovi attributi si creano gli enti geometrici derivati. Per crearli, normalmente si ricorre alla definizione che specifica le proprietà di ogni singolo ente. Le definizioni non devono essere presentate al bambino attraverso una comunicazione verbale o scritta, ma devono essere ricavate dalla operatività diretta.

Tipi di punti del piano

Utilizzando piani delimitati è necessario distinguere i loro punti in due categorie: punti interni e punti di confine.

Intuitivamente la distinzione è immediata, ma siccome sono concetti non primitivi (sono riconducibili ad altri) è opportuno definirli:
- **Punto interno del piano:** *quello dal quale si può andare in tutte le direzioni;*
- **Punto di confine del piano:** *quello dal quale si può andare solo in alcune ma non in tutte le direzioni.*

La distinzione fra i due tipi di punti dipende dal concetto di direzionalità; quindi, a livello psicomoto-rio, se il punto è nel piano, ci si può spostare in tutte le direzioni; se il punto è di confine, non ci si può spostare in tutte le direzioni.
Sul PIANO (pavimento di una stanza) il bambino può avere due possibilità:
- Si può spostare in tutte le direzioni che vuole (posizione INTERNA della stanza ® punto INTERNO del piano);
- Si può spostare solo in alcune direzioni (posizione LIMITE della stanza ® punto di CONFINE del piano).
.
Nella fig. 14 Paolo è su di un punto interno mentre Mario è su di un punto di confine del piano-pavimento della stanza.
Sul PIANO (geopiano con pioli di fig. 15) il bambino, partendo da un piolo, può avere due possibilità:
- Tendere gli elastici in tutte le direzioni (piolo INTERNO del geopiano ® punto INTERNO del piano);
- Tendere gli elastici solo in alcune direzioni (piolo ESTREMO del geopiano ® punto di CONFINE del piano).

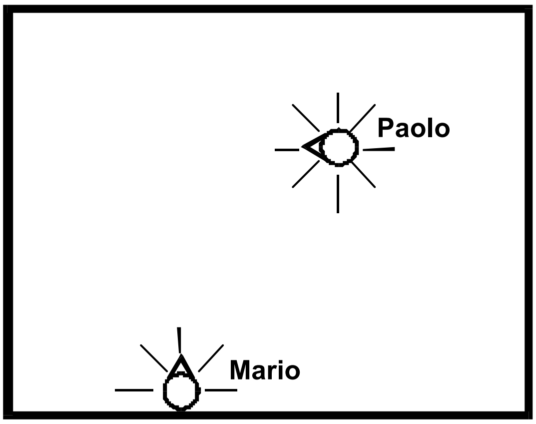


fig. 14

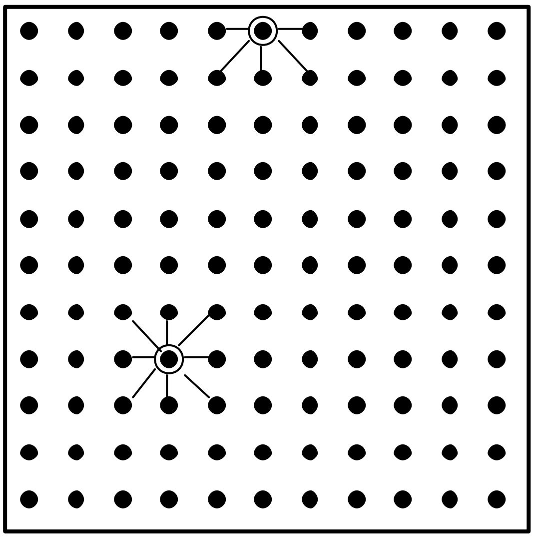
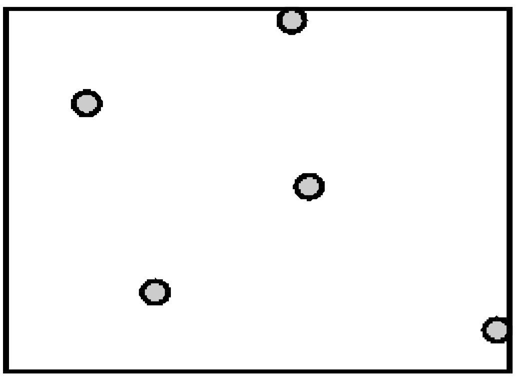


fig. 15

Gli stessi esempi si possono proporre utilizzando un foglio di carta come piano:



- Colora con il rosso i punti di confine.
- Colora con il blu i punti interni.
- Traccia con il verde un altro punto interno del piano.
- Traccia una riga azzurra qualsiasi che inizi in un punto interno e termini in un punto di confine.

fig. 16

Riferendosi all'aula, si possono porre domande del tipo:
- Il banco di Aldo è in una posizione interna o di confine rispetto al piano-pavimento?
- La porta dell'aula è in una posizione di confine?
- La cattedra si trova in una posizione interna o di confine?

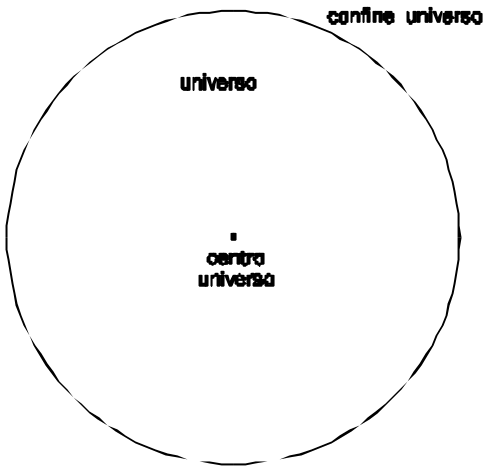
Oppure:

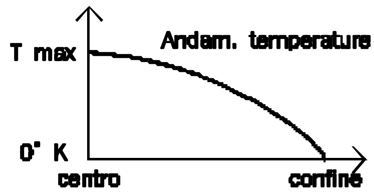
- Mettiti col banco all'interno del piano-pavimento e con la seggiola sul confine.
- Effettua un percorso intrecciato che parta da una posizione interna e che termini in una posizione di confine.

3.
MONDI NON EUCLIDEI

Si consideri un universo limitato avente una forma sferica e si supponga che in tale universo:

- la temperatura non sia uniforme: sia massima al centro e diminuisca progressivamente, man mano ci si avvicini al confine dell'universo, fino ad arrivare allo zero assoluto quando si giunge al confine;
- tutti i corpi, compresi quelli degli esseri che in tale universo vivono, abbiano lo stesso coefficiente di dilatazione, in modo che al variare della temperatura assoluta le loro dimensioni varino nello stesso modo.

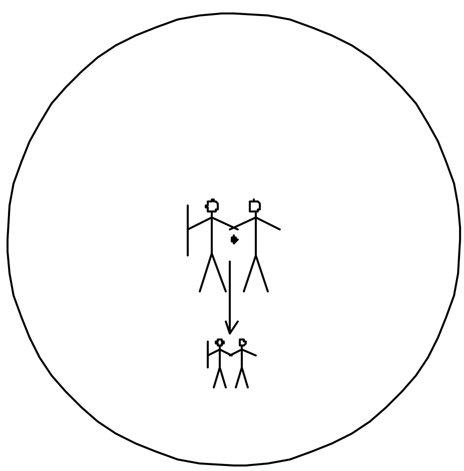




ASCISSA = distanza dal centro dell'universo
ORDINATA = temperature in gradi assoluti

fig. 17

Un uomo, posto al centro di tale universo, tiene in mano il campione metro in modo da poter effettuare delle misure lineari.
Questo uomo misura la sua altezza e misura anche l'altezza di un compagno. Entrambi cambiano di posizione in modo da allontanarsi dal centro. La loro temperatura diminuisce e, di conseguenza, anche le loro dimensioni, ma, insieme a loro, cambia di dimensione anche il campione metro. Per questi due esseri le altezze non sono cambiate perché il metro che trasportano cambia in maniera proporzionale.
I passi che fanno le due persone a loro appaiono di lunghezza costante, ma per un osservatore esterno al loro mondo risultano sempre più piccoli man mano che i due esseri si avvicinano al confine del loro universo. Anche la velocità di spostamento che, per i due compagni appare costante, per un osservatore esterno risulta essere sempre minore.



Variazione delle lunghezze dei passi procedendo dal centro al confine dell'universo:

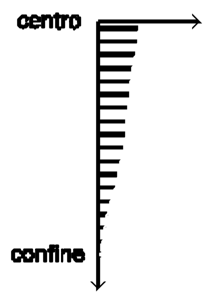
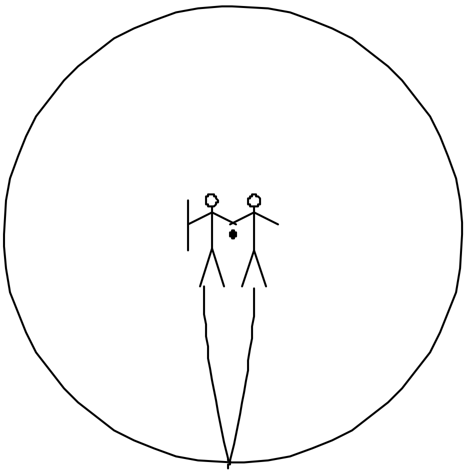


fig. 18

Riusciranno i due compagni a raggiungere il confine del loro universo limitato ?

Evidentemente no, perché i passi, diventando sempre più corti, permettono di compiere percorsi sempre più brevi e, nell'approssimarsi al confine, la lunghezza dei passi si approssima allo zero (al tendere della temperatura allo zero assoluto le dimensioni dei loro corpi tendono allo zero).
Un tale mondo è limitato per un osservatore esterno, ma apparirà come infinito per i suoi abitanti.

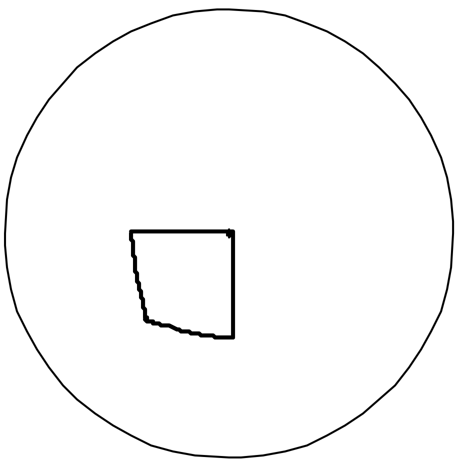
Si supponga che i due abitanti di questo mondo partendo dal centro e tenendosi per mano si avviino verso il confine con percorsi rettilinei paralleli (paralleli perché tenendosi per mano la loro distanza non rimane costante). Per l'osservatore esterno tale distanza diminuisce fino a tendere a zero quando i due si avvicinano sempre più al confine.
Per l'osservatore esterno i due percorsi risultano convergenti (il punto di convergenza si trova sul confine), mentre due percorsi paralleli per l'osservatore esterno risultano divergenti per gli abitanti.

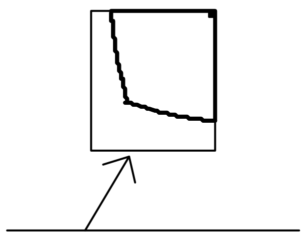


Come appaiono all'osservatore esterno le traiettorie dei percorsi rettilinei e paralleli (tali sono per i due compagni che si allontanano dal centro) che vengono compiuti dai due che si tengono per mano.

fig. 19

Si prenda un rettangolo e lo si ponga con un vertice coincidente con il centro del mondo stesso. La zona vicina al vertice opposto a quello che si trova nel centro viene ad avere una temperatura inferiore rispetto a quella degli altri vertici, quindi due lati hanno, per l'osservatore esterno, un andamento con curvatura (rettilineo per gli abitanti di tale mondo); inoltre la somma degli angoli interni del rettangolo risulta superiore all'angolo giro.





Come sarebbe il rettangolo se le temperature fossero costanti in ogni punto dell'universo.

fig. 20

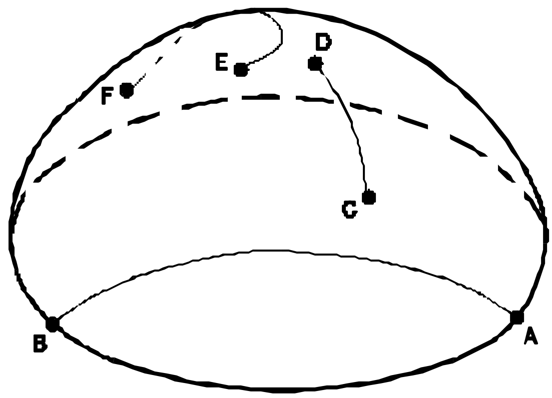
Disegnare enti geometrici in tale spazio risulta particolarmente difficile per chi, abituato alle proprietà euclidee, non accetta le proprietà non euclidee di tale spazio.

- Una rettilinea dovrebbe tracciarla con una curvatura (si osservino i due percorsi rettilinei e paralleli che le due persone compiono);
- Un rettangolo dovrebbe essere tracciato con alcuni lati curvi e l'uso del goniometro non sarebbe di alcuna utilità (la somma degli angoli interni non è più un angolo giro).

Se si dovesse considerare una piccolissima porzione di tale spazio, le differenze di temperatura sarebbero irrisorie. Le traiettorie rettilinee, i parallelismi ed i rettangoli avrebbero proprietà che differirebbero pochissimo da quelle euclidee e, più la porzione di spazio esaminata si dovesse ridurre, più tenderebbe ad assumere le proprietà di uno spazio euclideo.

Altro esempio.

Si consideri il seguente spazio non euclideo, diverso da quello precedentemente descritto.



DC : segmento perché è il percorso di lunghezza minore tra D e C.

EF : curvilinea perché non è il percorso di distanza minore fra E e F.

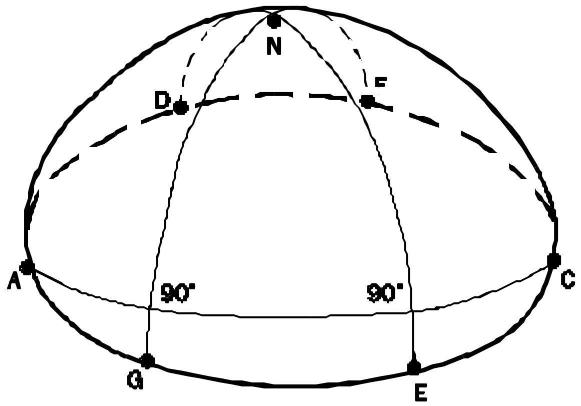
AB : retta perché è il percoroso di distanza minore fra i due punti A e B di confine del piano.

fig. 21

E' uno spazio che si potrebbe visualizzare come una parte grande, ma limitata, di una superficie sferica. Gli abitanti di questo mondo definirebbero il percorso rettilineo come quello più breve fra due punti ed una retta risulterebbe il percorso più breve fra due punti che si trovano sul confine del loro universo.

In questo spazio:

- Data una retta è possibile trovare un punto (è un punto collocato come un polo rispetto all'equatore che contiene la retta) dal quale passano infinite rette perpendicolari alla retta data.

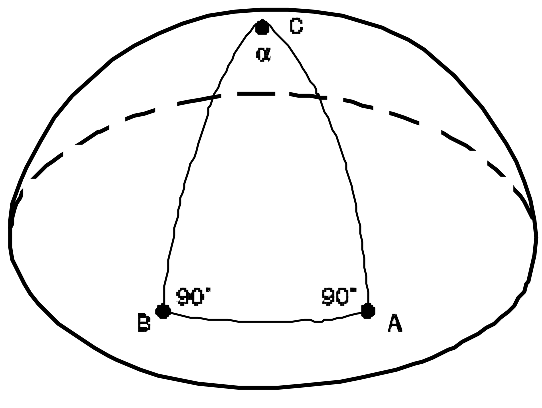


Le rette DE ed FG si intersecano nel punto N e sono entrambe perpendicolari alla retta AC.

Questo nella geometria euclidea è impossibile perché per un punto esterno ad una retta è possibile condurvi una e una sola perpendicolare.

fig. 22

La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di un angolo piatto (il fatto è evidente se un lato lo si pensa come una parte dell'equatore e gli altri due lati come parti di meridiani).



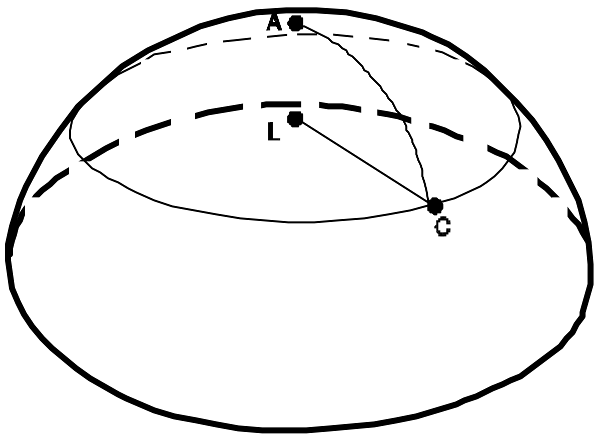
Il triangolo ABC ha i lati BC ed AC entrambi perpendicolari al lato AB.

La somma dei suoi angoli interni risulta:

$$90° + 90° + \alpha > 180°$$

fig. 23

Il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro non è "π" ma è sempre minore di "π".



La circonferenza tracciata per la geometria euclidea ha il centro in L e raggio LC mentre, per gli abitanti di tale mondo, ha centro in A e raggio AC. Quindi:

$$\frac{cfr}{2\ ´\ AC} < \frac{cfr}{2\ ´\ LC} = p$$

fig. 24

Anche in questo mondo accade un fatto del tutto identico a quello evidenziato nell'esempio precedente. Infatti, se si dovesse considerare una porzione estremamente ridotta di tale spazio, le proprietà geometriche si scosterebbero di pochissimo da quelle euclidee, le differenze diverrebbero, ad un certo punto, del tutto impercepibili.

PERCEZIONE NON EUCLIDEA E INTERPRETAZIONE EUCLIDEA

Si consideri come l'uomo percepisce il mondo che lo circonda:

- Le due linee di un binario ferroviario senza curve appaiono convergenti e, al limite, all'orizzonte sembra che si congiungano;

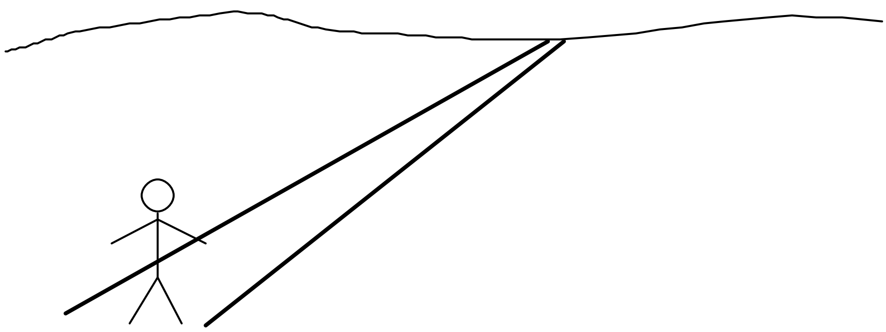


fig.25

- Una porta, guardata con una certa inclinazione, appare di forma trapezoidale, con due lati opposti paralleli e gli altri due non paralleli;

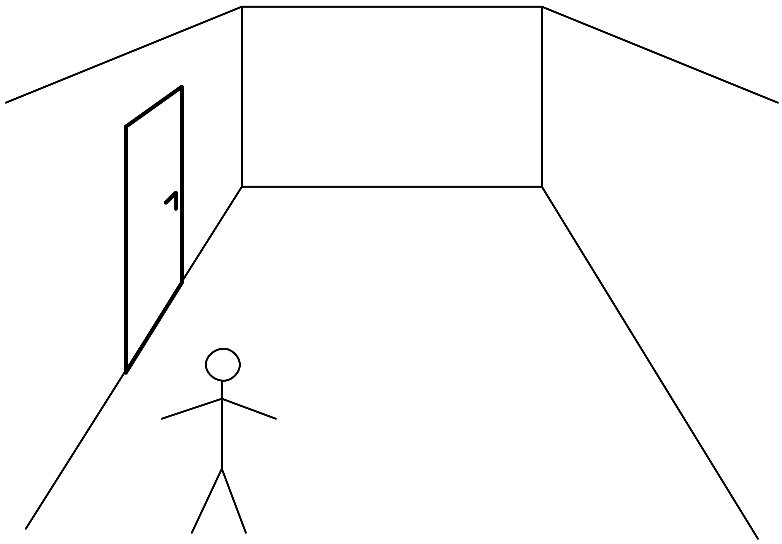


fig. 26

- Gli angoli formati dalle linee di separazione di una pavimentazione appaiono diversi;

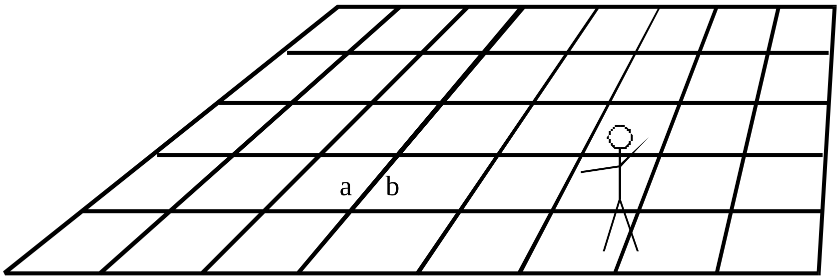


fig. 27

- Due quaderni posti a distanze diverse dal soggetto che li guarda appaiono di dimensioni diverse.

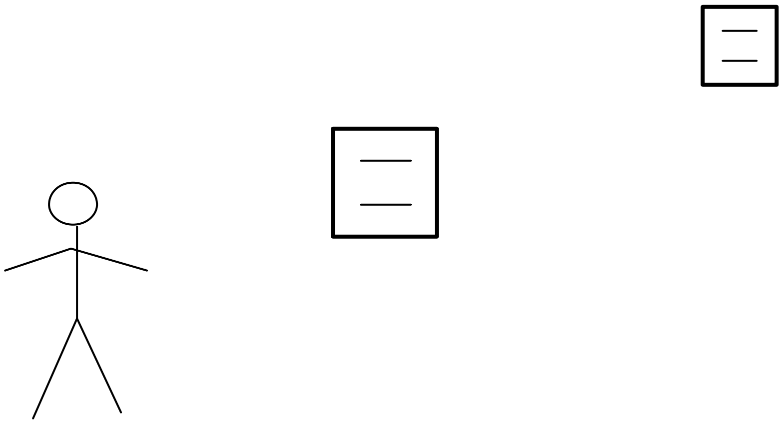


fig. 28

Ma l'uomo:

- le linee convergenti di un binario ferroviario le interpreta come parallele;
- la forma trapezoidale della porta la interpreta come una forma rettangolare;
- gli angoli diversi che si formano con una pavimentazione li interpreta come uguali;
- le diversità dimensionali dei due quaderni le interpreta come uguaglianze dimensionali.

Quindi l'uomo percepisce un mondo non euclideo ma lo interpreta in senso euclideo.
Questo accade perché l'uomo non ha esperienze dirette di tutto lo spazio che lo circonda, ma solo di una piccola porzione, quella che si trova nelle sue immediate vicinanze.
In tale piccolissima porzione di spazio le esperienze che l'uomo fa vengono percepite in un ambiente che non differisce da quello euclideo (*il binario che si trova nell'immediata vicinanza dell'osservatore, appare sicuramente parallelo*).

Per spazi un po' più grandi l'uomo proietta le conquiste che ha fatto nello spazio dove può agire (*nelle sue immediate vicinanze la distanza delle due linee di un binario è costante, quindi, anche se la distanza sembra che diminuisca, nella realtà proietta la conquista della distanza costante anche nelle parti di spazio non raggiungibili*).

La tendenza ad interpretare anche gli spazi estesi come euclidei può portare ad errori. Infatti, se si compie un percorso triangolare in una stanza e si misura la somma degli angoli interni, questa risulta come un angolo piatto. Se si ripete il percorso triangolare in un campo di calcio, se si fa una triangolazione con le cime di tre campanili della città, si ha ancora lo stesso risultato. L'uomo è portato a generalizzare il risultato costante per tutti gli ambiti spaziali, invece se una nave compie, nell'oceano, un grande percorso triangolare, la somma degli angoli interni risulta maggiore di un angolo piatto.
Per ritrovare la costanza si dovrebbero usare ragionamenti e formule che fanno parte di un piano non euclideo (le formule sarebbero della trigonometria sferica), di un piano con una curvatura costante.
Si potrebbe obiettare che il percorso fatto dalla nave non è un triangolo euclideo perché i suoi lati sono degli archi (in senso euclideo). Ma allora anche i percorsi fatti dal bambino sul campo di calcio sono degli archi (sono percorsi fatti sulla superficie terrestre che è curva); si dovrebbero allora utilizzare le formule della trigonometria sferica per giungere a conclusioni corrette, anche quando si lavora in spazi ridotti ?
Evidentemente no, perché le differenze non sarebbe-ro percepibili, nemmeno utilizzando gli strumenti più raffinati.

Quanto descritto può dare l'idea che la geometria sia un qualche cosa di concreto, identificabile con lo spazio entro il quale si vive, cioè con lo spazio fisico.
Ma la geometria non studia figure materiali e il gesso che le traccia sulla lavagna non è altro che uno strumento materiale che ci permette di rappresentarle.

La geometria si serve delle figure materiali e delle loro rappresentazioni "per studiare qualche cosa che è più elevato e più sottile", come dice Poincaré.

Se la geometria fosse una scienza sperimentale sarebbe sottoposta a continue revisioni, ogni esperimento porterebbe una nuova conferma o una nuova contraddizione e il tutto dovrebbe essere rivisto e resistemato in modo da togliere la contraddizione.
La geometria euclidea, come le altre geometrie, non è contraddittoria perché tratta di enti astratti e si basa su assiomi che non sono né giudizi sintetici a priori, né fatti sperimentali.

L'assioma della geometria euclidea:

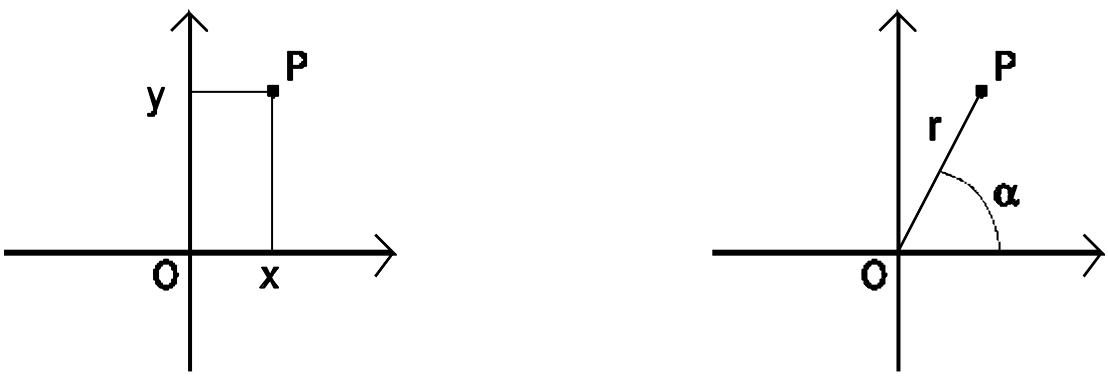
> *"Dati una retta ed un punto che non le appartiene, esiste una e una sola retta parallela alla retta data e passante per tale punto"*

non è un fatto sperimentale, non può venire da lunghe e meticolose ricerche e non può essere dimostrato né vero né falso.

Questi assiomi sono delle particolari "convenzioni"; la geometria euclidea si basa su alcuni di essi, altre geometrie si basano su altri assiomi.
La scelta, fra tutte le convenzioni possibili, *è sicuramente guidata da fatti sperimentali* e legati al mondo fisico, *ma resta libera* e non può che essere limitata dalla necessità di evitare ogni tipo di contraddizione.
E' proprio grazie a ciò che un sistema di assiomi non è discutibile, anche se le leggi sperimentate in uno spazio fisico, e che hanno incoraggiato la sua adozione, sono necessariamente approssimative.

Non ha senso la domanda: *"La geometria euclidea è più vera di quella creata da Riemann ?"* perché una geometria, come qualsiasi astrazione, non può essere più vera di un'altra, può essere solo più comoda per risolvere particolari problemi.
Un esempio che può far comprendere meglio tale concetto è il seguente:

Si consideri un punto su di un piano e si determini la sua posizione relativa ad un riferimento:



Coordinate cartesiane

Coordinate polari

fig. 29

E' giusto chiedersi se le coordinate cartesiane siano più vere di quelle polari ? No, possono essere più o meno comode a seconda del problema concreto che si deve risolvere.

QUESTIONI DIDATTICHE

Quale è per l'insegnante la geometria più comoda per affrontare il problema di educare il bambino alle conoscenze geometriche? L'esperienza suggerisce:

"*quella euclidea, ma non nella sua interezza*".

I motivi di questa risposta sono i seguenti:
- è la più semplice da apprendere e tale semplicità non è dovuta solo alle abitudini del nostro intelletto, ma è un dato di fatto, proprio come il calcolo aritmetico è più semplice del calcolo algebrico;
- è quella che si accorda in maniera più spontanea con le proprietà spaziali dei corpi che si possono esplorare con il tatto, con la dinamicità e con la vista;
- è quella che permette di risolvere semplicemente i problemi spaziali legati al vissuto quotidiano.

Fin qui sono stati descritti i vantaggi della geometria euclidea, ma essa si basa anche su piani illimitati, su rette che non hanno inizio e non hanno fine, su angoli che sono delimitati da enti illimitati come le semirette, ...

Un bambino di otto anni e mezzo di età mentale non è capace di concezioni riguardanti l'illimitatezza e ogni grafismo che l'insegnante escogita per rappresentare tale illimitatezza non può essere una iconografia, ma è solo una ideografia del concetto e si sa che, nei bambini, nessuna ideografia è capace di far scattare il momento cognitivo.
In tali condizioni, il proporre la distinzione fra retta e segmento risulta, per l'insegnante, un vero problema e non è l'aggiunta verbale "*che non ha inizio e non ha fine*" che può migliorarne la comprensione, al massimo l'insegnante riesce a rendere la retta un fatto quasi magico.

Con i bambini non si può incominciare l'educazione alla geometria con concetti implicanti l'illimitatezza, perché anche far comprendere che cosa è l'illimitatezza è uno degli obiettivi che l'insegnante deve perseguire.
Ma l'illimitatezza e l'infinità:
- non fanno parte del mondo fisico, ogni cosa nel nostro universo è finita, magari grandissima ma sempre finita, ed ogni esperienza spaziale, temporale, biologica,... ha sempre avuto un inizio ed ha, o avrà, sempre una fine;

- traggono origine da una capacità logica riconducibile alla INDUZIONE.

Ad esempio, l'affermazione: "*tra gli estremi di un segmento si trovano sempre infiniti punti appartenenti al segmento stesso*" può essere spiegata nel seguente modo:

Dati due punti distinti è sempre possibile trovare il loro punto medio e questo è distinto dai due che hanno permesso di individuarlo.
Si hanno ora tre punti distinti; si possono allora trovare i punti medi delle coppie consecutive di punti, e si arriva ad ottenere cinque punti distinti.
Ripetendo tale processo si arriva a 9 punti, poi a 17 punti e così via, fino a quando?

Siccome ogni punto ottenuto è sempre distinto dai precedenti, il processo viene ripetuto senza termine, la quantità di punti cresce senza termine.

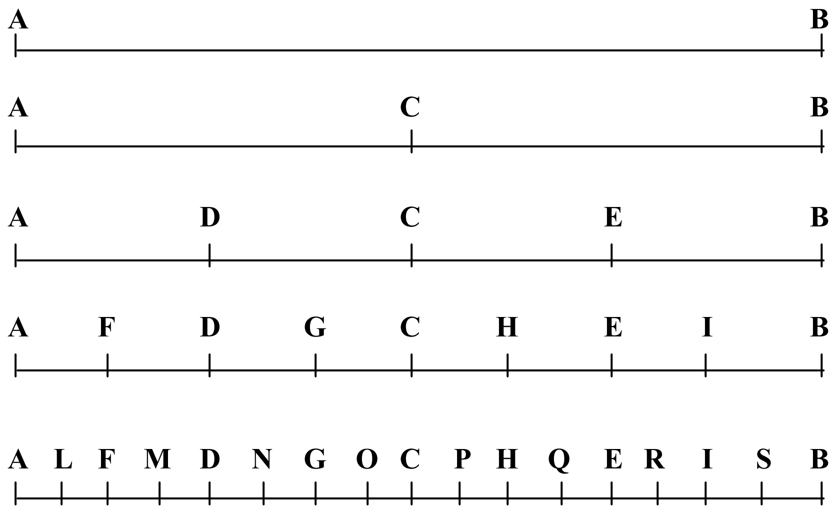


fig. 30

Anche con la geometria si può procedere in maniera analoga e, pur partendo dagli spazi finiti, per successivi passaggi si possono indurre l'illimitatezza e l'infinità caratteristiche della geometria euclidea.

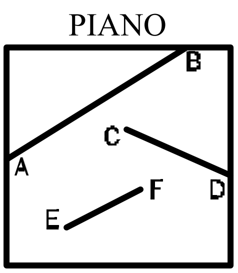


fig. 31

In questo piano limitato le tre rettilinee AB, CD, EF vengono interpretate (vedi capitolo seguente) come:
AB: *retta* (ha gli estremi sul confine del piano e gli altri punti sono tutti interni al piano);
CD: *semiretta* (ha un solo estremo sul confine del piano, gli altri punti sono tutti interni al piano);
EF: *segmento* (è formato solo da punti interni al piano).

PIANO ALLARGATO

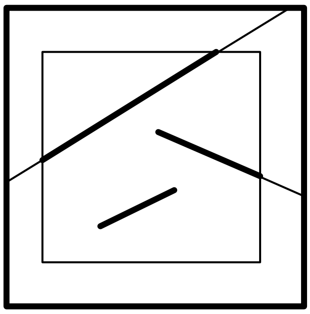


fig. 32

Se il precedente piano limitato dovesse risultare troppo piccolo per i lavori che si devono fare, allora si può considerarne un altro, sempre limitato, che lo contenga.
In tal caso la retta, per continuare ad essere tale, deve essere prolungata da entrambe le parti, mentre la semiretta deve essere prolungata solo dalla parte del confine.
Il segmento non deve essere modificato perché rimane segmento anche nel nuovo piano.

PIANO
ANCORA PIU' ALLARGATO

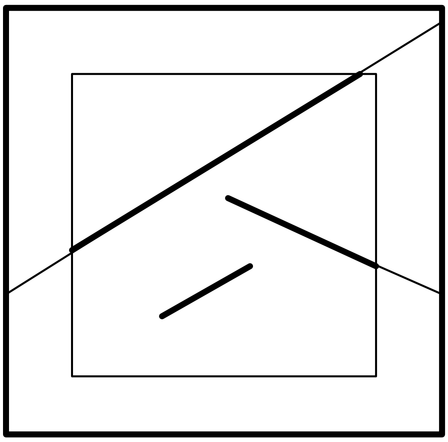


fig. 33

Se si dovesse ripetere l'operazione precedente, si dovrebbe ripetere anche l'operazione di aggiustamento della retta e della semiretta.
Prendendo via via piani sempre più grandi senza mai terminare, si giunge ad un piano che nella realtà non trova riscontro in nessuna superficie, le rette e le semirette risultano non più misurabili e non rappresentano alcun percorso o traiettoria reale.

Per induzione, collegando opportunamente tante limitatezze, si è giunti alla illimitatezza di alcune figure.

Il passaggio dai piani limitati a quelli illimitati non deve essere fatto all'inizio dell'educazione geometrica, ma è necessario attendere che le capacità induttive del bambino siano maturate sufficientemente. Dalle esperienze fatte l'età mentale più idonea per effettuare il passaggio è intorno ai 10 anni.

Proporre l'infinità al bambino non è una esperienza sconosciuta per l'insegnante; infatti il maestro del primo ciclo ha il compito d'insegnare i numeri naturali ai bambini di età mentale intorno ai 6 anni. Nessun maestro esordisce con l'affermazione: "*I numeri naturali sono infiniti*", ma le prime proposte sono inerenti a realtà che richiedono il conteggio e sono finite, sia in senso posizionale sia in senso cardinale, e sono realtà che si esprimono con numeri piccoli.
Poi si presentano realtà esprimibili con numeri un po' più grandi, e così via fino a quando il bambino capisce che dato un numero è sempre possibile trovarne uno più grande e il tutto non ha limite.

4.
LA RETTILINEITA' (*)

RETTE SEMIRETTE E SEGMENTI

Rettilinee: *sono tutte le linee di un piano che iniziano con una direzione da un punto e proseguono senza mai cambiare la direzione di partenza.*

Nella concezione spaziale sono i percorsi senza cambiamento di direzione quelli che aiutano a conquistare la rettilineità.
Dopo aver lavorato molto sui percorsi in generale, come visto anche nel capitolo precedente, è bene prendere in considerazione i percorsi che non contengono cambiamenti di direzione:

- Parti dal banco e raggiungi la cattedra senza mai curvare o ruotare né a destra né a sinistra.
- Puoi, partendo dal tuo banco, raggiungere la porta dell'aula senza mai cambiare direzione né a destra né a sinistra?
- Se parti dal tuo banco in direzione della lavagna e prosegui senza cambiare direzione, quale è la prima cosa che incontri?
- Posizionati in modo da avere la lavagna di fronte. Chiudi gli occhi e senza cambiare direzione devi raggiungere la lavagna.

Dopo aver lavorato con percorsi rettilinei in ambienti comuni, si deve passare alla classificazione delle rettilineità e, per ottenere ciò, è bene porsi in un ambiente completamente sgombro da attrezzature.

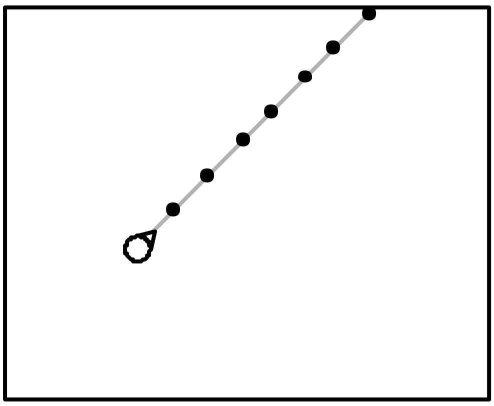


fig. 34

Mentre il bambino esegue l'esercizio, deve dire ad ogni passo se la posizione che occupa è interna al piano o è di confine.

E' opportuno visualizzare i percorsi con corde, birilli o altro materiale, in modo da rilevare sia le posizioni assunte, sia il tracciato.

Mentre alcuni bambini eseguono gli esercizi a livello psicomotorio, gli altri, utilizzando un foglio che rappresenta il piano-pavimento, riproducono le posizioni ed i percorsi via via eseguiti.

(*) Nella seguente proposta, per necessità didattiche non sempre verrà rispettato il rigore dei concetti geometrici; infatti in tutte le geometrie la retta viene data come concetto primitivo, quindi della retta non si hanno definizioni pur avendo delle proprietà. In questa proposta la retta viene data come entità derivata dalla linea e dalla direzione (i bambini la percepiscono come spostamento sul piano senza cambiamento di direzione).
Altro esempio: il parallelismo fra rette del piano viene dato in geometria come intersezione vuota, come rette che non hanno punti in comune, mentre la proposta definisce il parallelismo ricorrendo alla direzionalità (i bambini lo percepiscono come rette distinte che hanno la stessa direzione).

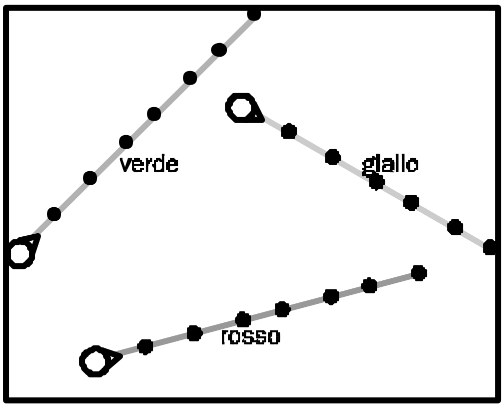


fig. 35

Viceversa, si fanno eseguire sul piano-pavimento i tracciati rappresentati nell'illustrazione, e si confrontano rilevandone gli attributi che hanno in comune e quelli che li differenziano.

Attributi comuni:
- i tre tracciati appartengono allo stesso piano;
- sono tutti rettilinei, cioè senza cambiamento di direzione.

Differenze:
- i tre tracciati vanno in direzioni diverse;
- sono fatti con un numero di passi diverso;
- il percorso rosso è aggirabile, gli altri no;
- il percorso verde divide il piano in due parti, gli altri no;
- il percorso rosso è fatto solo di posizioni interne al piano, quello giallo è fatto con una sola posizione di confine, mentre quello verde ha due posizioni di confine (le posizioni estreme).

In funzione dell'ultima differenza elencata, si giunge alla classificazione dei percorsi rettilinei in:

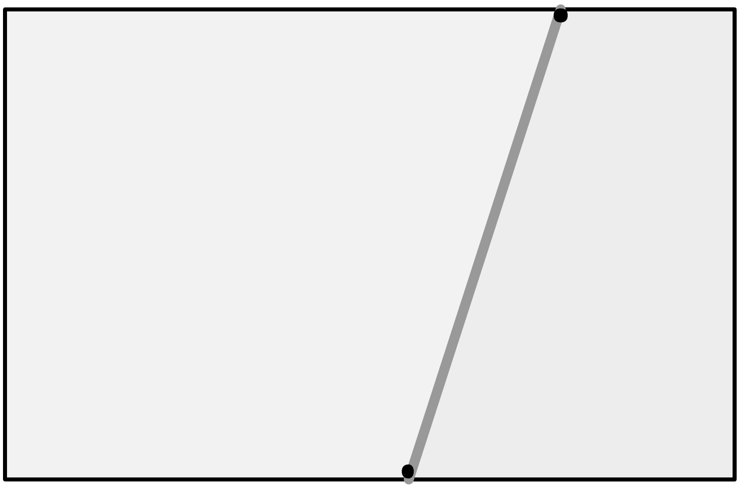


fig. 36

Retta:
é una linea rettilinea che inizia da un punto di confine del piano e termina in un altro punto di confine. (Ha gli estremi sul confine del piano).

Per tale motivo la retta divide il piano in due parti e non è aggirabile.

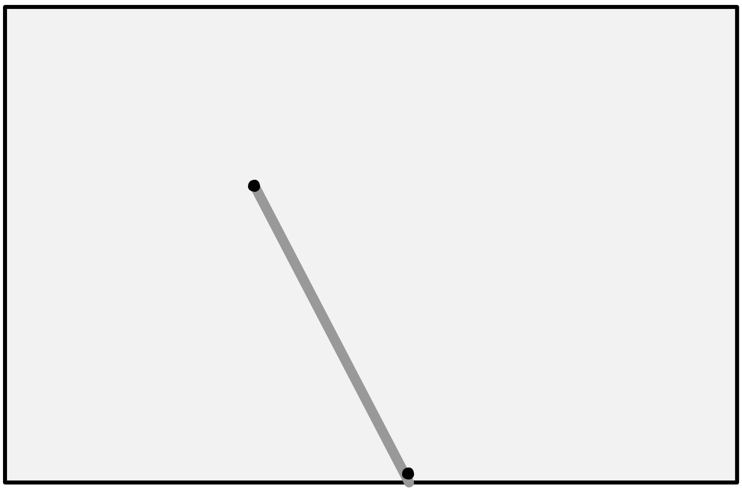


fig. 37

Semiretta:
é una linea rettilinea che ha gli estremi uno interno al piano e l'altro sul confine.

La semiretta non divide il piano in due parti e non è aggirabile.

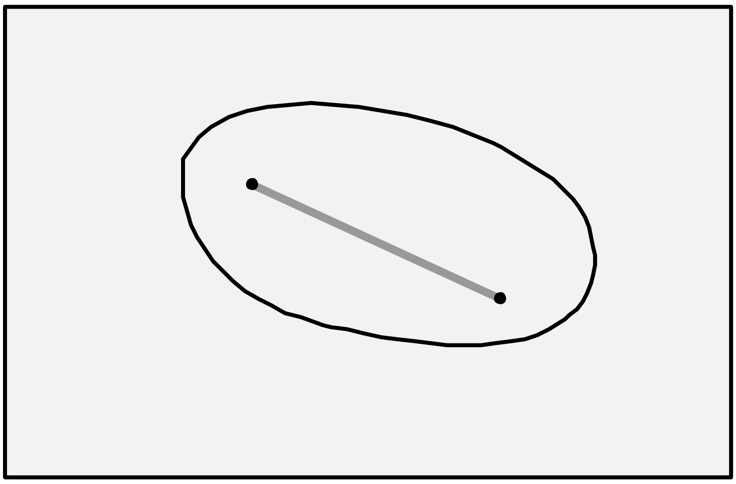


fig.38

Segmento:
é una linea rettilinea che ha entrambi gli estremi interni al piano.

Non divide il piano in due parti ed è aggirabile.

Occorre verificare che tali differenziazioni siano chiare. Se in una aula vuota si pone un banco in una posizione interna, si possono fare le seguenti domande:
- partendo dal banco, fai un percorso che descriva una semiretta;
- partendo dalla porta, fai un percorso che descriva una retta;
- partendo dalla finestra, puoi fare un percorso che descriva un segmento? E una semiretta?

Altri esercizi:

Sul geopiano a pioli metti tre elastici che indichino:
- una semiretta;
- una retta;
- un segmento.

(Una soluzione potrebbe essere quella suggerita a fianco.)

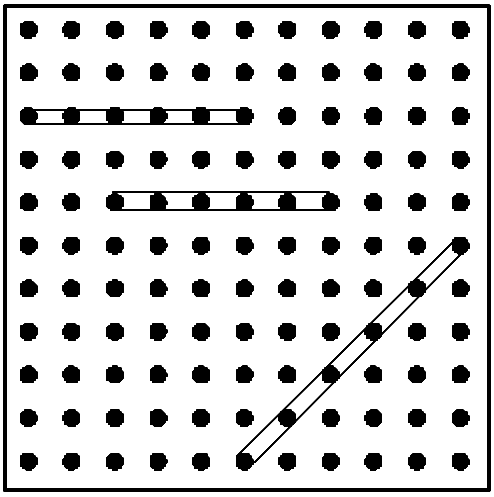


fig.39

Il vetro di una finestra, considerando il telaio come confine, è un piano che si presta ad esercitazioni semplici.

Incolla tre pezzi di nastro adesivo in modo da rappresentare:
- un segmento rosso;
- una retta verde;
- una semiretta blu.

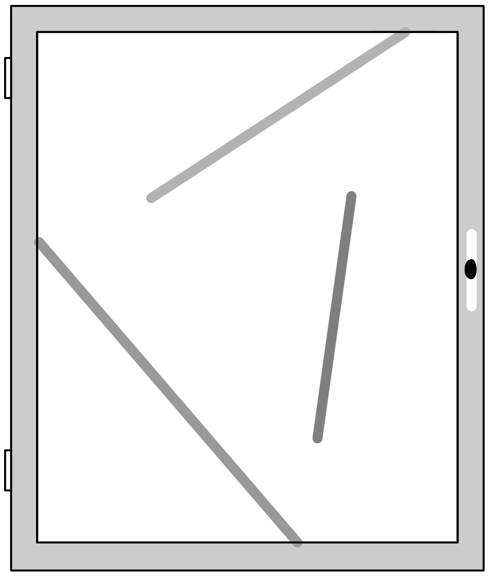
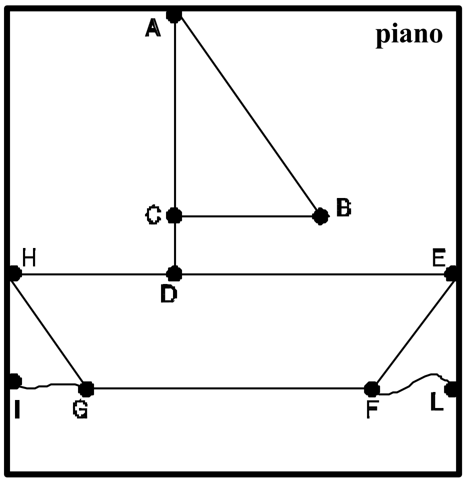


fig.40

Si propongono esercizi analoghi utilizzando un foglio come piano e tracciando le linee con i pennarelli. Viceversa si individuano rette, semirette e segmenti rappresentate su schede predisposte. Schede che permettono di verificare come il bambino sa classificare le rettilinee possono essere del tipo seguente:



Classifica i punti e le linee tracciate nel piano, utilizzando le lettere:

punti interni: C,________________

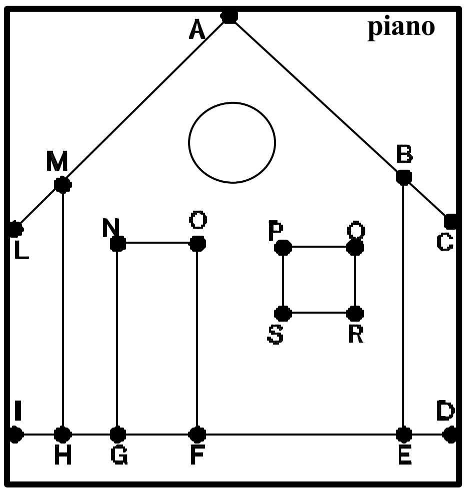
punti di confine: A,________________

rette: ________________

semirette: AC,________________

segmenti: CD,________________

fig. 41



Elenca i segmenti che terminano o iniziano in G:

____

Si sono usate delle semirette per disegnare la fine-stra ? ________________

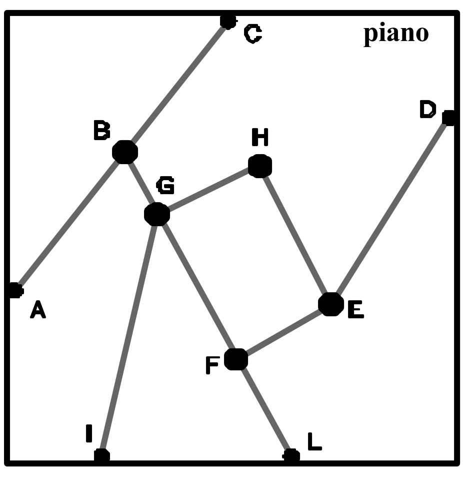
Il segmento HE contiene degli altri segmenti. Elencali : ________________

Scrivi due segmenti che insieme formano un nuovo segmento : ________________

Esistono due segmenti che insieme formano una semiretta ?

____

fig. 42



Scrivi tutti i punti che riesci a vedere:

Punti interni: ________________

Punti di confine: ________________

Rette : ________________

Semirette: ________________

Segmenti: ________________

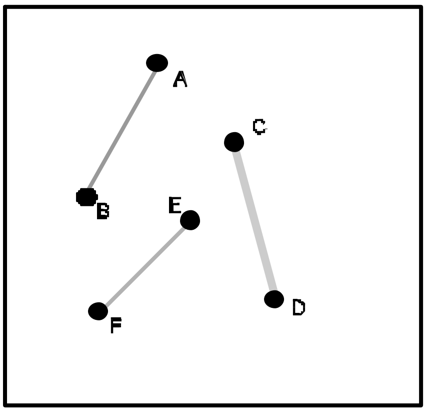
fig. 43

RELAZIONI DI CONTENENZA FRA FIGURE

Attraverso gli esercizi che seguono, il bambino scoprirà che:

- dato un segmento è sempre possibile tracciare un altro segmento o una semiretta o una retta che lo contiene;
- tracciata una semiretta è sempre possibile individuare un'altra semiretta o una retta che la contiene. Non esiste un segmento che contenga la semiretta tracciata.
- tracciata una retta non è possibile trovare rettilinee che la contengano se non la retta stessa.

Ogni segmento Ì altri segmenti, semirette, una retta.
Ogni semiretta Ì altre semirette, una retta.
Ogni retta Ì una retta (se stessa).



Traccia un segmento che contenga il segmento AB.

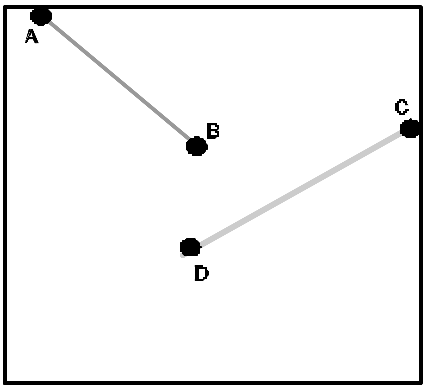
Traccia una semiretta che contenga il segmento EF.

E' possibile trovare un'altra semiretta, diversa da quella tracciata, che contenga il segmento EF ? ____________

Traccia una retta che contenga il segmento CD.

E' possibile trovare un'altra retta, diversa da quella tracciata, che contenga il segmento CD ? ____________

fig. 44



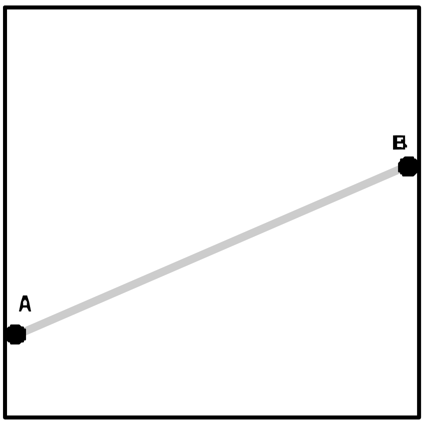
E' possibile trovare un segmento che contenga una delle due semirette tracciate ? __________________________

Traccia una retta contenente la semiretta AB.

Traccia una semiretta contenente la semiretta CD.

E' possibile trovare un'altra semiretta contenente la semiretta appena tracciata ? _______________________

fig. 45



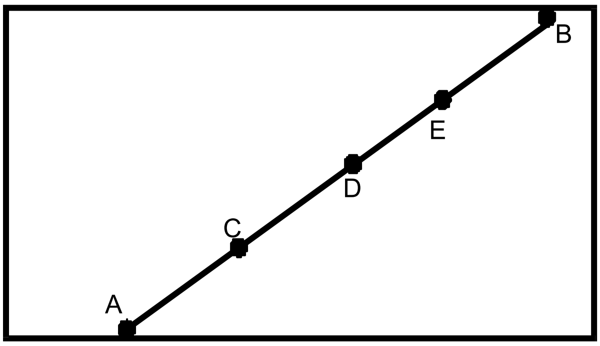
Traccia un segmento contenuto nella retta AB.

E' possibile trovare un segmento che contenga la retta AB ? ____________

E' possibile trovare una semiretta che contenga la retta AB ? ____________

E' possibile trovare una retta, diversa da AB, che contenga la retta AB ? __________

fig. 46



Sul piano disegnato a fianco è stata tracciata la retta AB e su di essa sono stati posti alcuni punti in modo da individuare segmenti e semirette.

Completa con crocette la tabella sottostante:

		Rettilinee che contengono quelle citate a fianco									
		Segmenti (Sg)			Semirette (Sr)						Rette (Rt)
		CD	DE	CE	AC	AD	AE	BE	BD	BC	AB
Sg	CD	x		x		x	x			x	x
	DE										
	CE										
Sr	AC										
	AD										
	AE										
	BE										
	BD										
	BC										
Rt	AB										

Completa la tabella sottostante:

		Rettilinee che CONTENGONO quelle citate a fianco	Rettilinee CONTENUTE in quelle citate a fianco
Sg	CD	CD, CE, AD, CB	
	DE		
	CE		
Sr	AC		
	AD		
	AE		AC, ..
	BE		
	BD		
	BC		
Rt	AB		

fig. 47

5.
LE REGIONI DEL PIANO

LINEE PER SUDDIVIDERE IL PIANO IN REGIONI

Una linea, in certe condizioni, può suddividere il piano in più parti. Ciascuna di queste parti viene chiamata *regione piana* (o regione del piano).
Non tutte le linee delimitano una o più regioni, come la linea aperta non intrecciata avente per estremi punti interni del piano; una semiretta; un segmento.

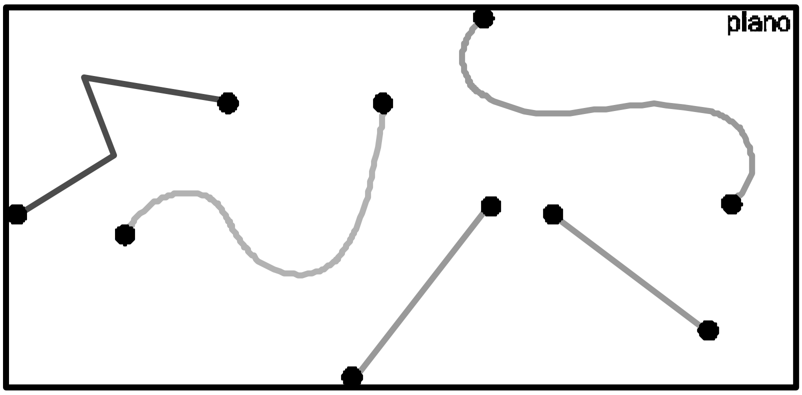


fig. 48

Linee che non suddividono il piano in regioni.

Per condurre il bambino al concetto di regione, è bene partire dal livello psicomotorio.

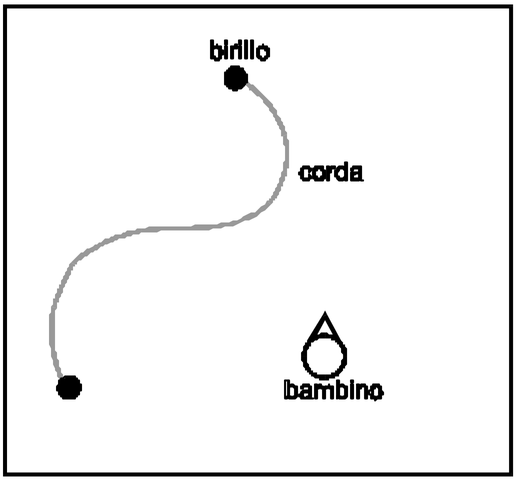


fig. 49

Si chiede al bambino di muoversi liberamente, rispettando un'unica condizione: non scavalcare la corda disposta sul pavimento.
Nel caso illustrato a fianco, si può chiedere:
- puoi raggiungere tutte le posizioni del piano, senza scavalcare la corda?

Il bambino eseguirà percorsi dimostrativi e concluderà che non ci sono zone del piano irraggiungibili.

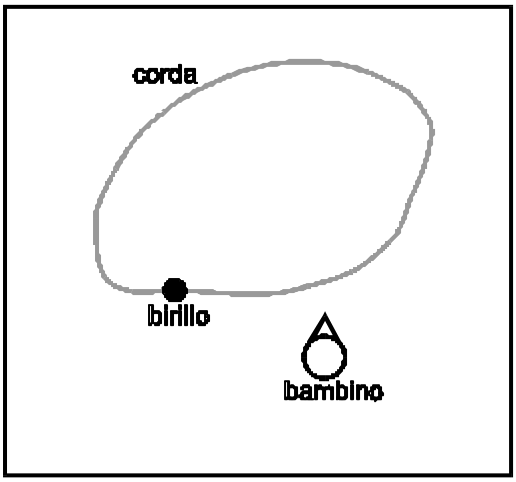


fig. 50

Successivamente la corda viene disposta in modo da formare una linea chiusa, il bambino dovrà riconoscere che esiste una parte del piano non raggiungibile e quindi il piano risulta diviso in due parti che verranno chiamate REGIONI.

Nel caso qui raffigurato, le due regioni assumono nomi già conosciuti:
- regione *dentro* la corda;
- regione *fuori* la corda.

Si può chiedere al bambino se è possibile suddividere il piano in due regioni disponendo la corda in modo che i due estremi non si tocchino. Le soluzioni, ottenute per prove e per errori, possono essere le seguenti:

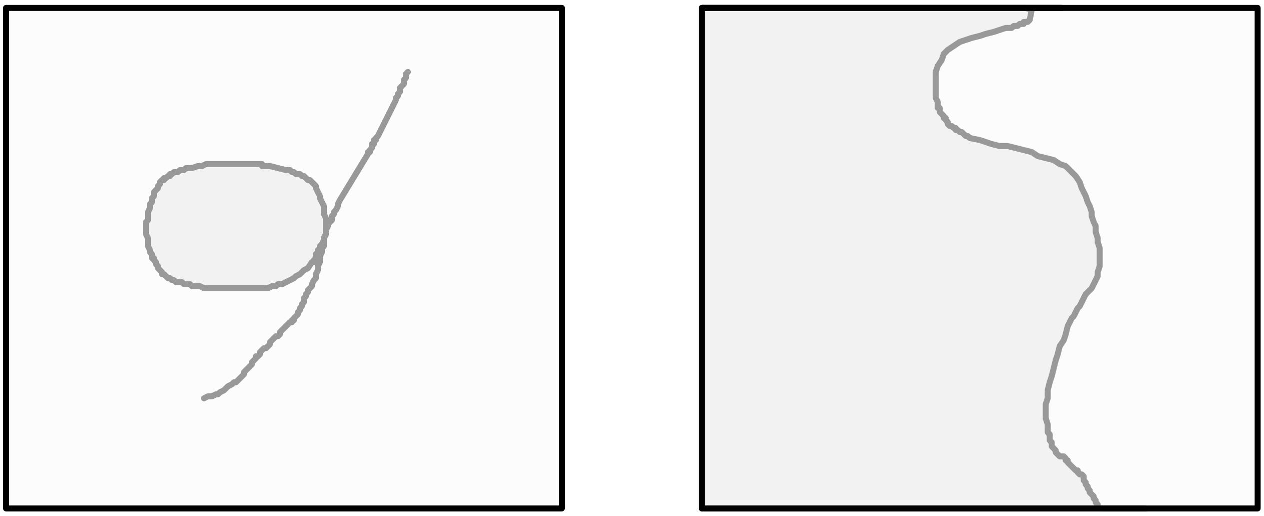
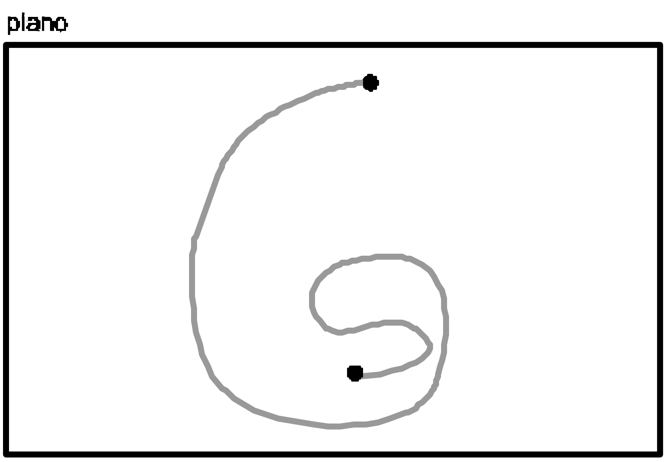


fig. 51

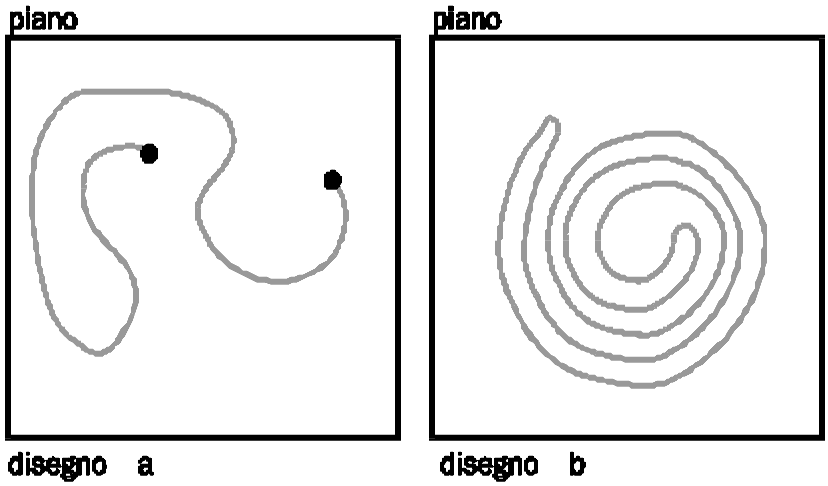
Ora si procede a livello grafico.



Senza scavalcare la linea tracciata e utilizzando un solo colore, riesci a colorare il piano ?

Prova !

fig. 52

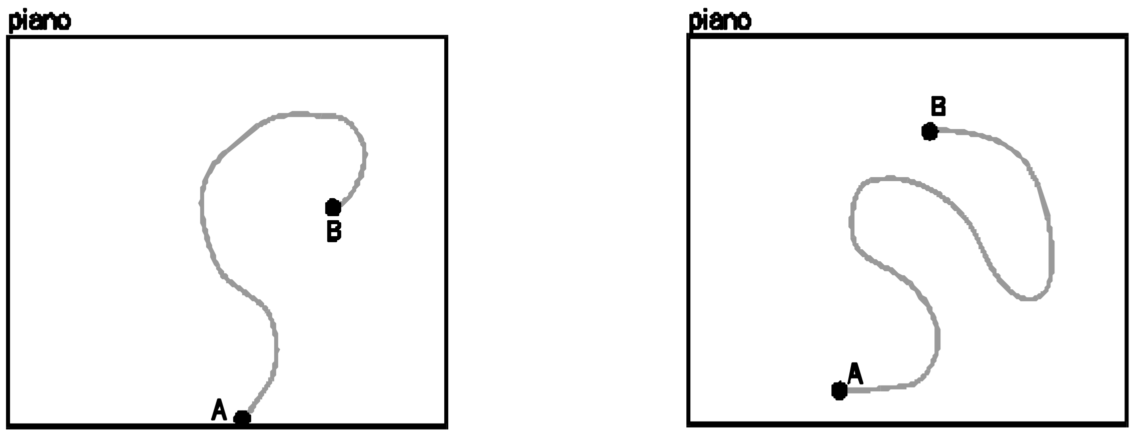


In quale dei due disegni la linea divide il piano in due regioni ?

____

Colora la regione DENTRO la linea.

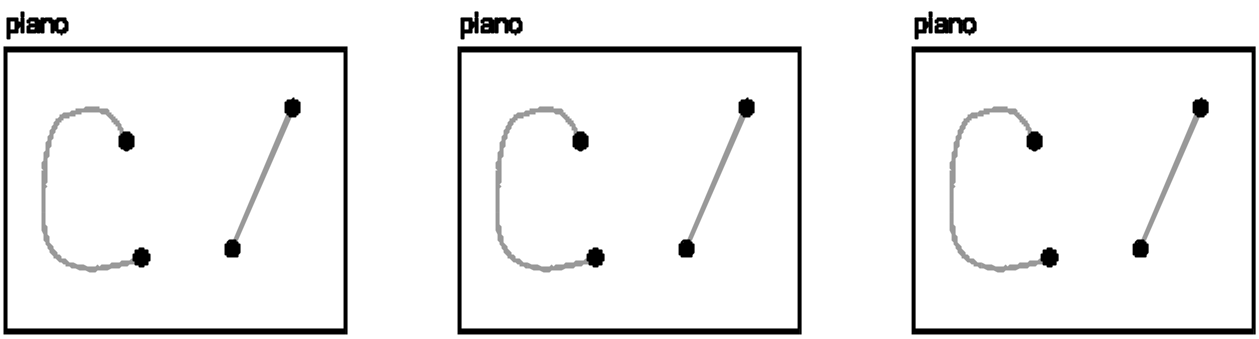
fig. 53



Prolunga la linea dalla parte di B in modo da dividere il piano in due regioni senza ritornare in A.

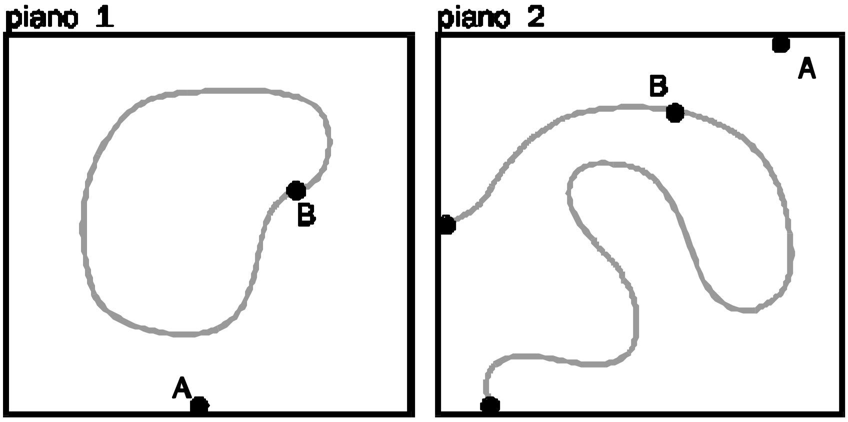
Prolunga la linea da entrambe le parti in modo da dividere il piano in due regioni.

fig. 54



Formare, utilizzando le linee già tracciate, tre tipi diversi di regioni.

fig. 55



Tracciando, in entrambi i piani, le semirette AB, in quale dei due si ottiene un aumento del numero di regioni?

____

Colora diversamente le tre regioni così ottenute.

fig. 56

RETTILINEE PER SUDDIVIDERE IL PIANO IN REGIONI

Nel laboratorio psicomotorio (o in un ambiente senza oggetti sul pavimento) si organizza lo spazio di lavoro con bastoni o altri materiali rigidi non curvi.

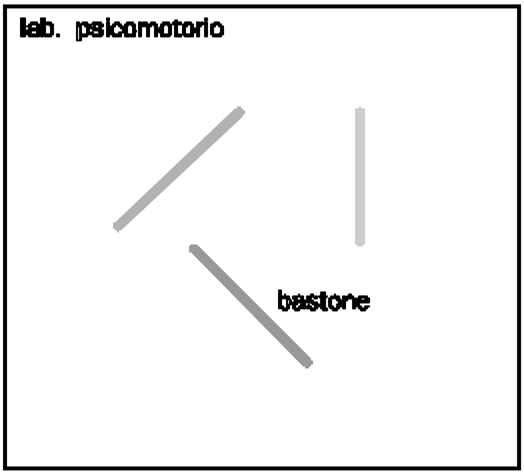


fig. 57

Il pavimento dell'ambiente viene ritenuto un piano dove le pareti sono il confine, i bastoni appoggiati sul pavimento sono delle rettilinee.
Nel caso che la stanza non fosse sgombra, si può usare un pezzo di moquette come piano, oppure si può delimitare il piano di lavoro con nastro adesivo ben visibile.

Una figura rettilinea può essere indifferentemente una retta, una semiretta o un segmento a secondo di come viene collocata nel piano.

Esercizio:

posiziona i tre bastoni che si trovano sul pavimento in modo che:
- il bastone giallo sia una semiretta;
- il bastone rosso sia un segmento;
- il bastone blu sia una retta.

Utilizzando due bastoni come segmento, si può ripartire il piano in due regioni?

Il bambino, a volte subito, a volte dopo alcuni tentativi, capisce che non è possibile.

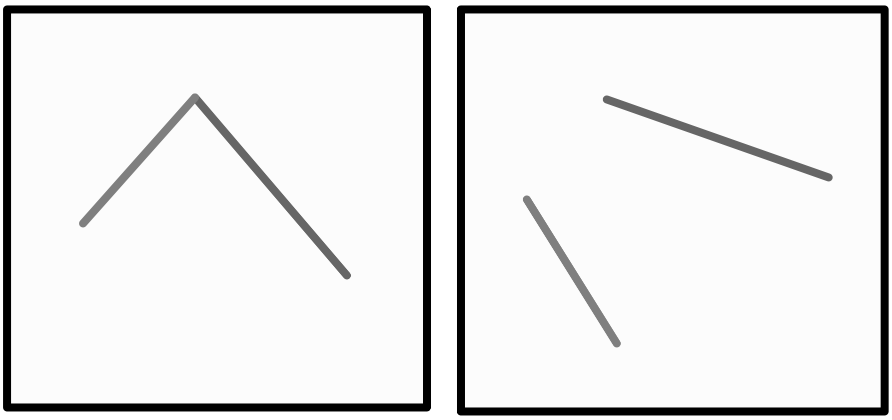


fig. 58

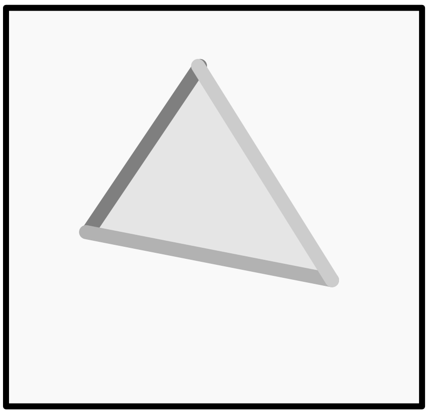


fig. 59

Adoperando tre bastoni-segmenti si può ripartire il piano in due regioni?

Dopo alcuni tentativi il bambino scoprirà che è possibile, creando un dentro e un fuori.
Costruirà così il triangolo.

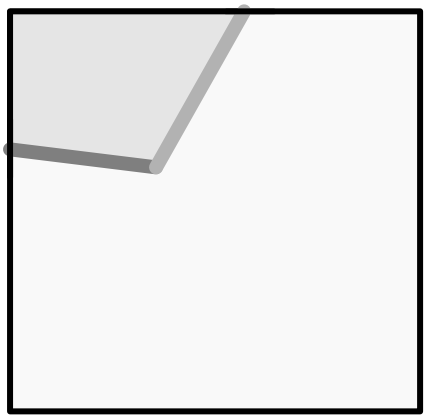


fig. 60

In quale modo, utilizzando due bastoni, riesci a dividere il piano in due regioni?

In questo caso, i due bastoni che tipo di linee sono: segmenti, semirette o rette?

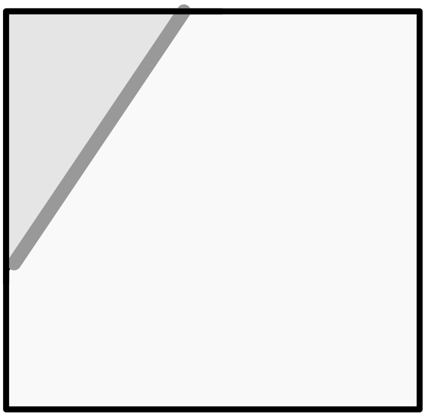


fig. 61

Con un solo bastone dividi il piano in due regioni.

Il bastone utilizzato che tipo di linea rappresenta: semiretta, retta o segmento?

N.B. Si eseguono analoghi esercizi utilizzando come piano di lavoro un foglio (oppure il ripiano del banco) e rappresentando le linee con matite, asticciole, righetto, ecc...

POLIGONI

Poligonale *è una linea del piano formata solo ed esclusivamente da segmenti consecutivi*.
Poligono: *è la parte di piano interna ad una poligonale chiusa* .

Alcune regioni, per l'importanza che sono destinate ad avere sul piano didattico, vengono chiamate con nomi particolari.
Le suddivisioni del piano più importanti sono quelle che si ottengono utilizzando come frontiere delle linee rettilinee: fra queste si considerano gli angoli, i semipiani, i poligoni.
Occorre portare il bambino ad acquisire i concetti relativi a queste regioni.

Nel laboratorio psicomotorio, dove il pavimento viene interpretato come piano, il bambino si posiziona in un punto interno e, a testimonianza di tale punto, viene messo un segnaposto.
Il bambino si può muovere con percorsi non curvilinei, può ruotare su se stesso e non può toccare i punti di confine. Alla fine del percorso deve ritrovarsi al punto di partenza.

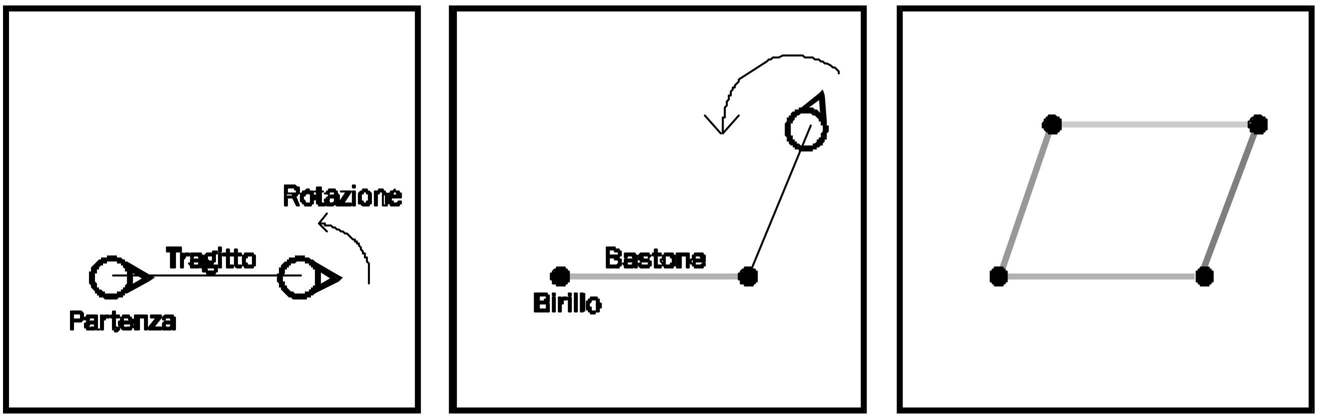


fig. 62

Operativamente, ad ogni cambio di direzione, viene messo un testimone e viene disegnato sul pavimento il percorso effettuato.

Alla fine, analizzando la situazione ottenuta, si pongono le seguenti domande:
- il piano è stato suddiviso in regioni? Quante?
- c'é una regione che possiamo chiamare "dentro"?
- la frontiera della regione "dentro" da che tipo di linea è formata?
- perché la frontiera di questa regione non può essere formata da rette o semirette?
- esiste un punto della regione "dentro" che sta sul confine del piano?

Qualsiasi regione avente queste caratteristiche viene chiamata, come già detto, **POLIGONO**.

Elementi di un poligono

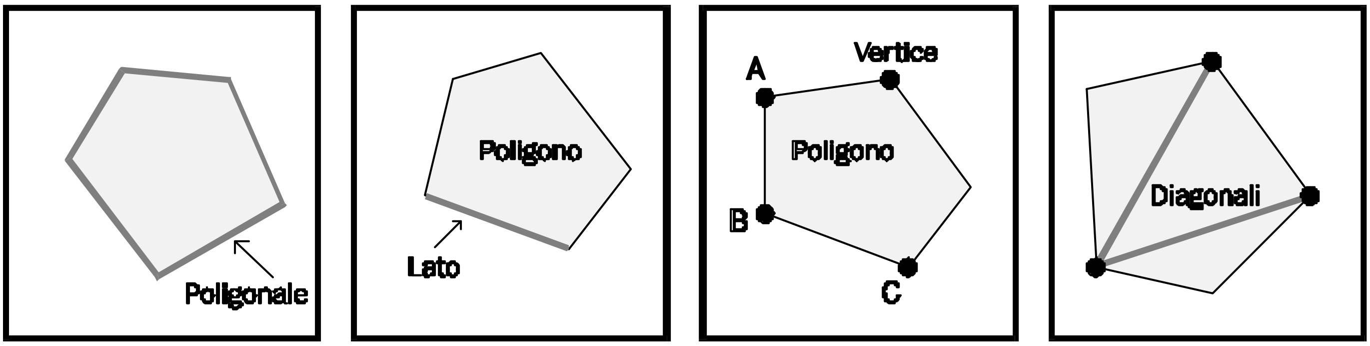


fig. 63

La **poligonale chiusa** è *la frontiera del poligono ed è formata solo ed esclusivamente da segmenti consecutivi.*
Il **lato** *è ogni segmento della poligonale*.
I lati possono essere:
consecutivi: *hanno un punto in comune*;
opposti: *non hanno un punto in comune*.
Il **vertice** *è il punto comune a due lati consecutivi* (dove il bambino, ruotando su se stesso, ha cambiato direzione).
I vertici si distinguono in:
consecutivi: *sono gli estremi di uno stesso lato*;
opposti: *non sono consecutivi*.
La **diagonale** *è ogni segmento che ha gli estremi in vertici non consecutivi*.

A livello corporeo si propone un approfondimento della terminologia introdotta.

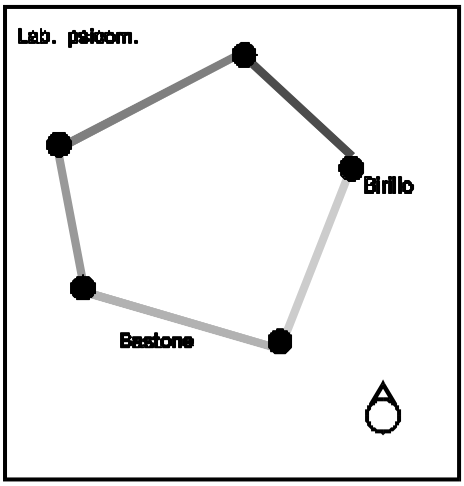


fig. 64

Ad un bambino vengono date le seguenti consegne:
- percorri la poligonale chiusa;
- posizionati su di un vertice;
- percorri un solo lato;
- percorri due lati consecutivi;
- percorri prima un lato e poi un suo lato opposto;
- posizionati su un vertice: quanti vertici consecutivi ci sono rispetto a quello su cui ti trovi? Indicali;
- posizionati su un vertice opposto rispetto a quello su cui è posizionato l'insegnante.

Analogamente si propongono esercizi sul geopiano, sulla finestra, sul piano del banco, sulla lavagna e su schede.

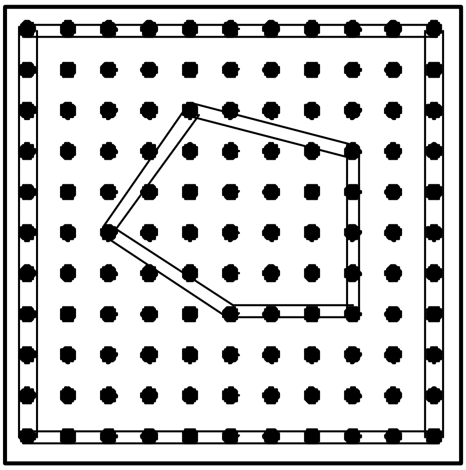


fig. 65

Sul geopiano si costruisce, con elastici tesi fra pioli interni, la poligonale che individua un poligono (ad es. un pentagono) e si pongono le seguenti domande:

- La suddivisione del piano ottenuta con gli elastici rossi ha creato un poligono?
- Quanti sono i vertici e quanti sono i lati?
- Metti due dischetti forati su due vertici consecutivi.
- Tendi un elastico verde fra due pioli in modo che risulti una diagonale.
- Metti altri elastici verdi in modo da segnare tutte le diagonali.

Per convenzione, a livello grafico, i vertici dei poligoni vengono identificati con lettere maiuscole e, di conseguenza, il poligono viene identificato con l'elencazione ordinata dai suoi vertici.

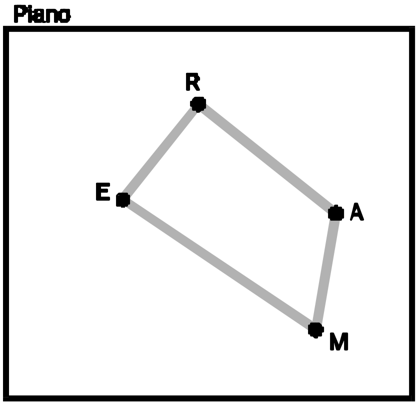


fig. 66

Poligono: MARE

Poligonale chiusa: MAREM

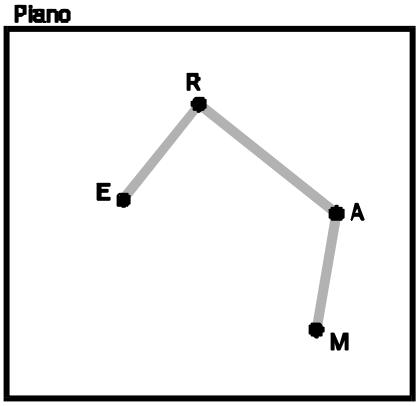
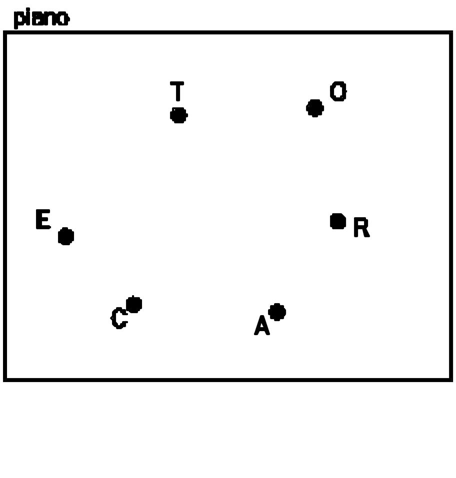


fig. 67

Poligonale aperta: MARE

Occorre fare attenzione perché la poligonale (linea frontiera della regione) deve essere identificata con il punto di partenza coincidente con il punto di arrivo.



Partendo dal vertice C congiungi i punti in modo da formare il poligono CAROTE e coloralo di verde.

(Attenzione: colora il poligono, non la poligonale)

Elenca i vertici opposti al vertice E: _______________

Elenca i vertici consecutivi al vertice T : ___________

Quale vertice è consecutivo al vertice A e consecutivo al vertice O ? _______

Quali sono i lati consecutivi al lato OR ? _______________

Quale è il lato opposto sia al lato ET sia al lato RO ? ____________

Il segmento CO divide il poligono in altri due. Nomina i due poligoni: ________________________

fig. 68

I poligoni vengono a loro volta classificati in funzione del numero di lati costituenti la loro frontiera (anche se la terminologia in uso fa una classificazione in base agli angoli):

POLIGONI		
	TERMINOLOGIA	
N° lati	in funzione dei lati	in uso
3	TRILATERO	TRIANGOLO
4	QUADRILATERO	QUADRILATERO
5	PENTALATERO	PENTAGONO
6	ESALATERO	ESAGONO
7	EPTALATERO	EPTAGONO
8	OTTALATERO	OTTAGONO
9	ENNALATERO	ENNAGONO
10	DECALATERO	DECAGONO
....	....	....
12	DODECALATERO	DODECAGONO
....	....	....

ANGOLI

***Angolo**: è la parte di piano delimitata da due semirette aventi l'origine in comune.*

Come al solito si parte dalle esperienze legate ai percorsi nel piano; si agisce in una stanza (laboratorio psicomotorio) sgombra da strutture.

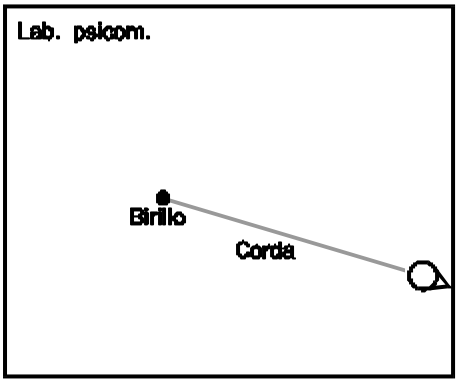


fig. 69

Un bambino si posiziona in un punto interno del piano di lavoro; tale posizione viene evidenziata con un segnaposto (birillo o altro).

Si sposta con traiettoria rettilinea fino a raggiungere il confine del piano (la parete della stanza). Il percorso viene documentato da una corda.

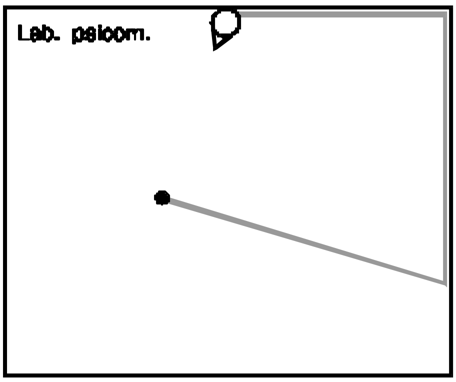


fig. 70

Il bambino deve ora percorrere un tratto del confine del piano rasentando la parete.

Per rimarcare quest'ultima parte del percorso si porranno altre corde sugli spigoli formati dal pavimento con le pareti.

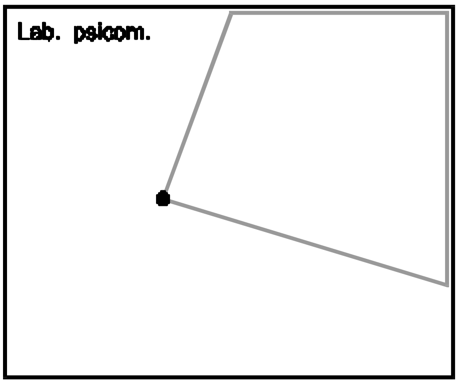


fig. 71

Il bambino ritorna al punto di partenza, sempre con traiettoria rettilinea, e documenta l'ultimo tratto di percorso con un'altra corda.

La parte di piano delimitata dalle corde non è un poligono perché la sua frontiera non è una poligonale (è fatta da semirette e non da segmenti).

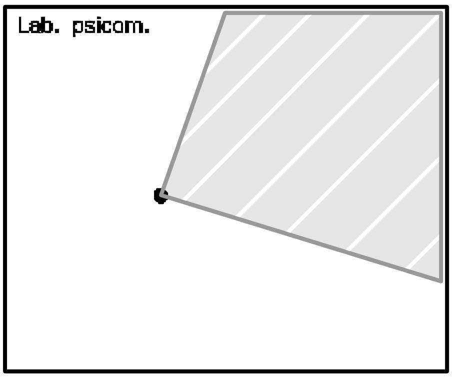
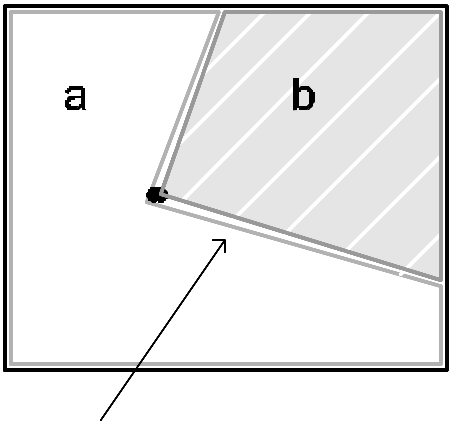


fig. 72

La regione viene evidenziata disponendo sul pavimento strisce di carta, fogli, ... e si dichiara che è un **Angolo**, rimarcando il confine fatto di semirette.

Si pongono le seguenti domande:
- Puoi raggiungere tutte le posizioni del piano senza scavalcare le corde?
- La regione che hai descritto con il tuo percorso, da quali linee è delimitata?
- Per quale motivo questa regione non è un poligono?



Corde di colore diverso da quello usato per le corde precedenti.

fig. 73

Con altre corde si contorna la regione non rimarcata. Chiamate con "a" e "b" le due regioni del piano, si invitano due bambini a percorrere le semirette e le parti di confine del piano: Luca della regione "a", Pino della regione "b".

Alla fine si pongono le seguenti domande:
- Entrambi hanno percorso due semirette?
- Entrambi hanno percorso una parte del confine del piano?
- Le due semirette percorse da Pino sono le stesse che ha percorso Luca?
- Luca e Pino hanno percorso la stessa parte di confine del piano?

Occorre rimarcare che le sole due semirette non bastano per individuare un angolo; infatti due semirette con l'origine in comune dividono il piano in due angoli. A quale dei due ci si sta riferendo?

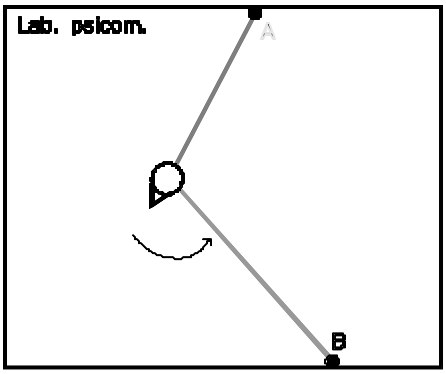


fig. 74

Pino parte dal punto "A" di confine del piano e, con andamento rettilineo, raggiunge un punto interno, cambia direzione e riparte raggiungendo, sempre in modo rettilineo, un altro punto "B" del confine del piano.
Le due semirette vengono evidenziate con corde in modo da rimarcare la partizione del piano in due regioni.

Domande:
- Pino, col suo percorso, ha ripartito il piano in due regioni. E' possibile distinguere una regione dall'altra?
- Il percorso eseguito da Pino ci fa capire a quale delle due regioni si sta riferendo?
- Se Pino percorre una parte di confine del piano, si può capire a quale delle due regioni si sta riferendo?
- Senza percorrere una parte di confine del piano, come è possibile distinguere a quale delle due regioni ci si sta riferendo?

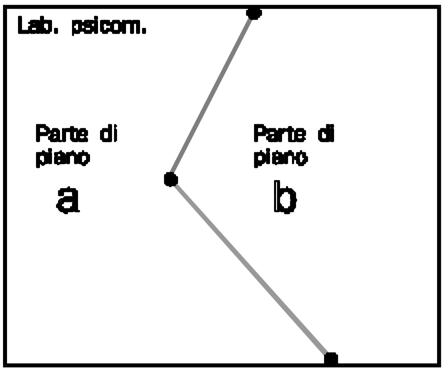


fig. 75

Come già detto precedentemente, in questo caso non è possibile stabilire a quale delle due parti ci si sta riferendo.

I bambini vengono invitati a trovare un modo per distinguere una regione dall'altra e troveranno diverse risposte.
Per portarli al segno convenzionale si fanno le seguenti proposte:

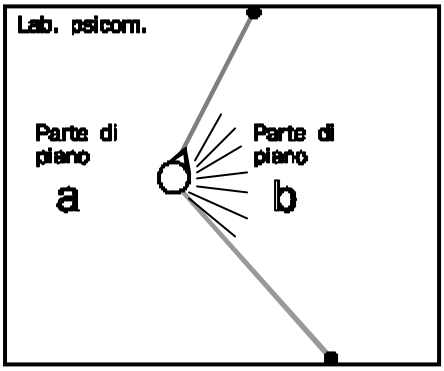


fig. 76

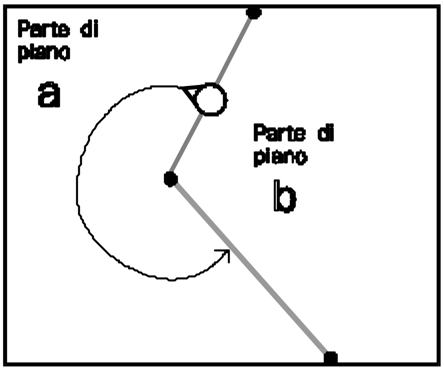


fig. 77

1) Il bambino, in piedi sul vertice, si orienta su una semiretta e ruota fino a trovarsi orientato sull'altra semiretta.
Il verso della rotazione indica la regione cui si riferisce. Nella figura è evidenziata la regione "b".

2) Il bambino parte da un punto di una semiretta e raggiunge un punto dell'altra semiretta con un percorso curvilineo.
Si evidenzia il percorso con una corda. Nella figura è stata evidenziata la regione "a".

Come già detto, qualsiasi regione piana avente queste caratteristiche viene chiamata ANGOLO, perciò, riassumendo:
- *si chiama* ***angolo*** *ciascuna delle due regioni in cui è stato ripartito il piano mediante due semirette aventi l'origine in comune;*
- *le due semirette vengono chiamate* ***lati****;*
- *il punto in comune ai due lati viene chiamato* ***vertice*** *dell'angolo.*

Osservazione:

I nomi "lati" e "vertici" vengono usati per parti di piano diverse e le loro definizioni sono:

- ***lato****: è una rettilinea che fa da confine o parte di confine a una regione* (lato di un poligono è uno dei segmenti che fanno da confine al poligono; lato di un angolo è una delle semirette che fanno da confine all'angolo; lato di un semipiano è la retta che fa da confine al semipiano)

- ***vertice****: è un punto da dove partono o confluiscono almeno due rettilinee* (vertice di un poligono è il punto da dove partono o confluiscono due lati; vertice di un angolo è il punto di partenza delle due semirettelati dell'angolo; vertice di una piramide è il punto da cui partono o arrivano gli spigoli; ecc.)

Angolo giro, angolo nullo

Alcuni angoli sono di difficile percezione perché non appaiono delimitati da due semirette distinte, come l'angolo giro e come l'angolo nullo. Per portare il bambino a considerare anche questi casi particolari come angoli è necessario procedere in modo da identificarli come situazioni portate al limite.

Si posiziona un bambino in un punto interno al piano e si tende una corda blu dal bambino al confine del piano per individuare una semiretta. Un altro bambino parte dalla stessa posizione del 1°, percorre la corda semiretta, tendendo un elastico tra lui e il compagno posizionato.

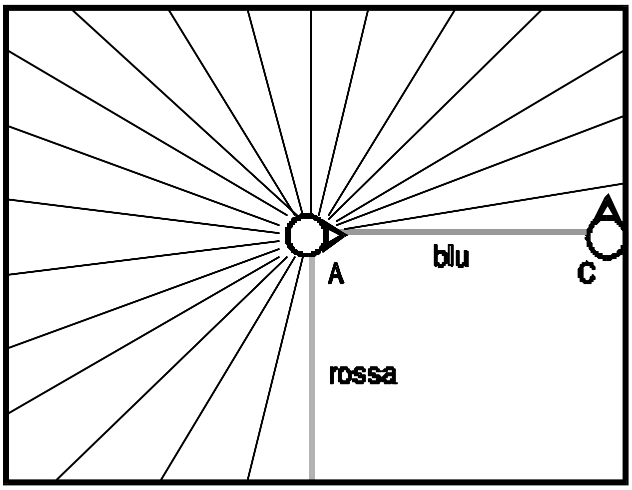


fig. 78

Il bambino sul confine viene invitato a descrivere un angolo viaggiando sul confine e tenendo l'elastico. Quando rientra al vertice, punto di partenza, viene messa per terra una corda rossa (la seconda semiretta) per delimitare l'angolo descritto.

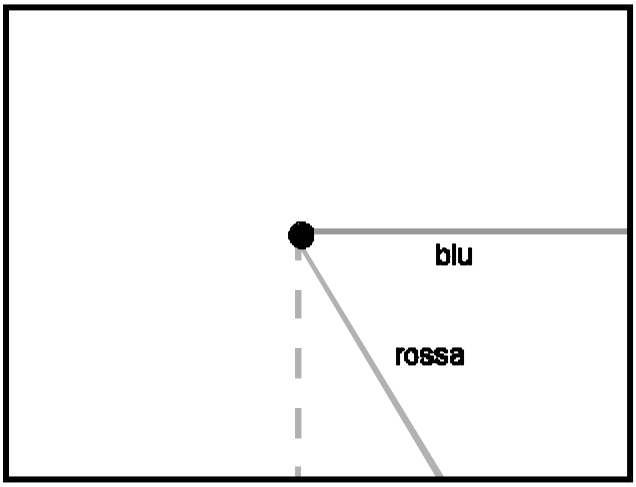


fig. 79

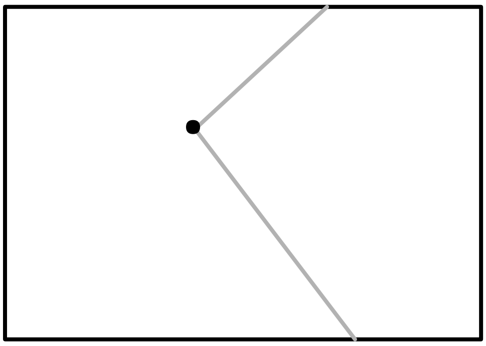
Una seconda coppia di bambini partendo sempre dalla stessa semiretta-corda blu, deve descrivere un angolo maggiore del precedente.
La semiretta-corda rossa viene spostata in modo da evidenziare il nuovo angolo.

Si procede analogamente facendo descrivere angoli sempre maggiori fino a raggiungere il maggior angolo possibile: la corda rossa verrà a coincidere con la corda blu.
Il bambino posizionato sul vertice, in quest'ultimo caso, *farà la rotazione completa di un giro su se stesso per descrivere l'angolo più ampio possibile. Tale angolo viene chiamato* **Angolo giro**.

Chiedendo ai bambini di descrivere angoli sempre più piccoli, invece che più grandi, si arriva all'angolo più piccolo possibile, dove la semiretta di partenza coincide con quella di arrivo, come per l'angolo giro, ma il *1° bambino al vertice non compie alcuna rotazione e il 2° bambino, arrivato al confine, ritorna al punto di partenza senza aver percorso una parte del confine. Tale angolo viene chiamato* **Angolo nullo**.

Esempi analoghi a livello manipolatorio si possono proporre sul geopiano, sul piano del banco, ...

Schede sugli angoli

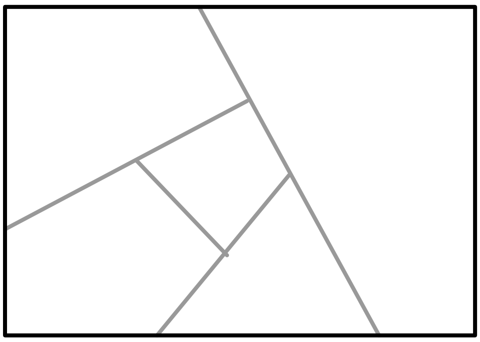


Colora di giallo un angolo e di verde l'altro.

Traccia poi 10 semirette uscenti dal vertice e contenute nell'angolo giallo.

Traccia il confine dell'angolo verde e indica l'angolo con un arco.

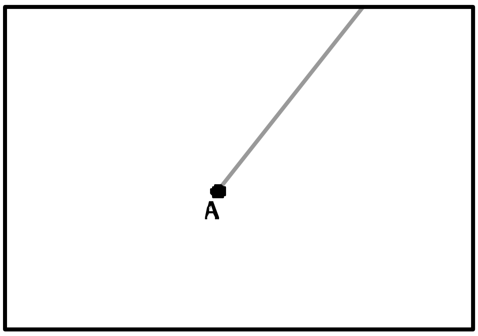
fig. 80



Trova due angoli e traccia gli archi per indicarli.

Traccia almeno 8 semirette uscenti dai vertici e contenute negli angoli individuati.

fig. 81

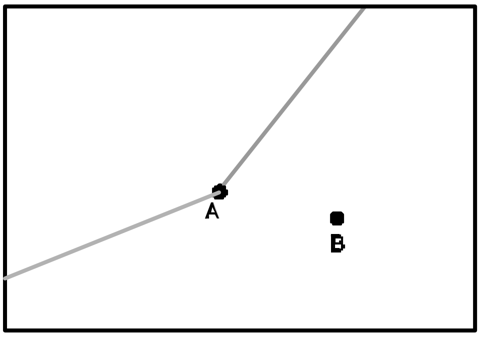


Considera A il vertice di un angolo che ha un lato nella semiretta data.

Traccia l'altro lato, con il colore verde, e traccia almeno 10 semirette uscenti dal vertice e contenute nell'angolo.

Con il colore verde evidenzia il confine dell'angolo giro individuato dalla semiretta verde.

fig. 82



Traccia un arco per indicare l'angolo che contiene il punto B.

Da B traccia una semiretta blu e rimarca, se è possibile, il confine dell'angolo nullo individuato dalla semiretta.

fig. 83

ANGOLI E RAPPORTI TOPOLOGICI

I bambini si dispongono in ordine sparso. Scelti due bambini come riferimento si individuano le parti di piano attraverso i rapporti topologici davanti-dietro.

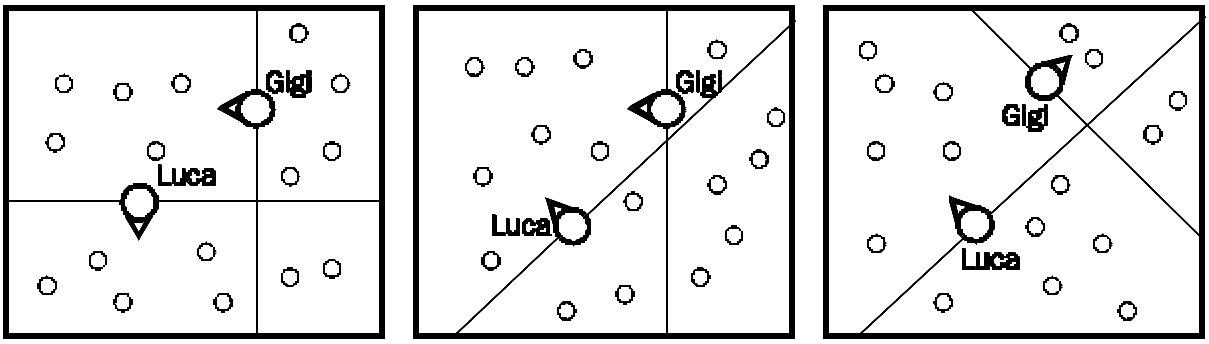


fig. 84

ESEMPIO:
- Si siedono tutti i bambini davanti a Gigi e contemporaneamente davanti a Luca;
- si siedono i bambini davanti a Gigi e dietro Luca;
- alzano le braccia i bambini non davanti a Gigi e davanti a Luca;
- si sdraiano i bambini non dietro Gigi e non davanti a Luca.

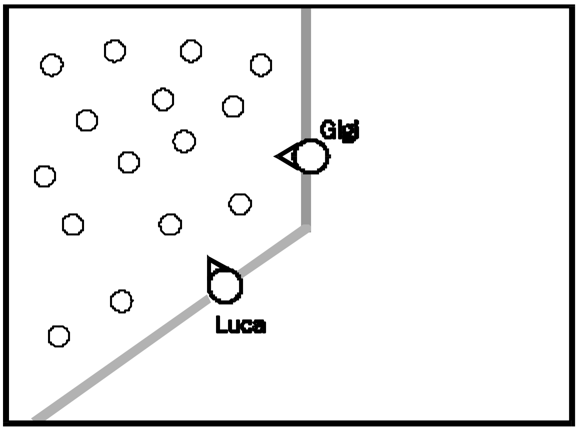


fig. 85

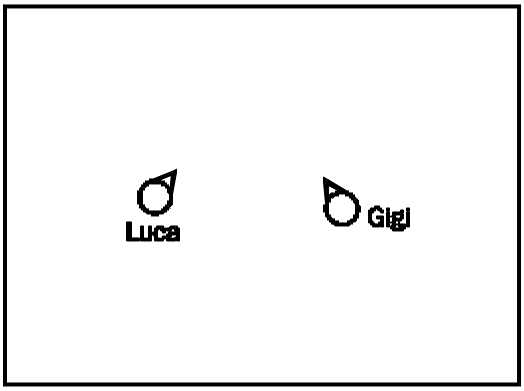
Tutti i bambini si spostano nella parte di piano davanti sia a Gigi sia a Luca.

Si delimita con due corde la parte di piano dove i bambini si possono collocare rispetto alla consegna data.

Come si chiama la parte di piano occupata dai bambini?
E' un angolo?

A livello manipolatorio si possono proporre esempi analoghi utilizzando il geopiano.

ESEMPI DI SCHEDE:



Colora di blu l'angolo davanti ad entrambi.

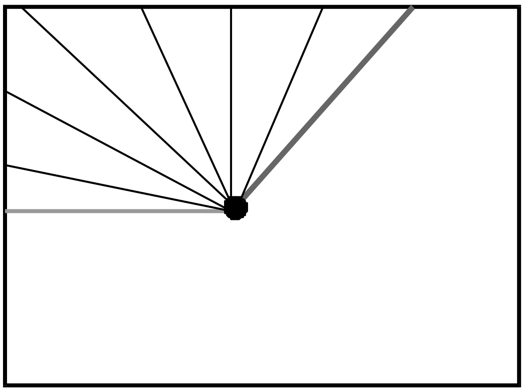
Colora di verde l'angolo davanti a Luca e dietro a Gigi.

Colora di rosso l'angolo dietro ad entrambi.

Dove si trova l'angolo non colorato rispetto ai due bambini ? ____________________

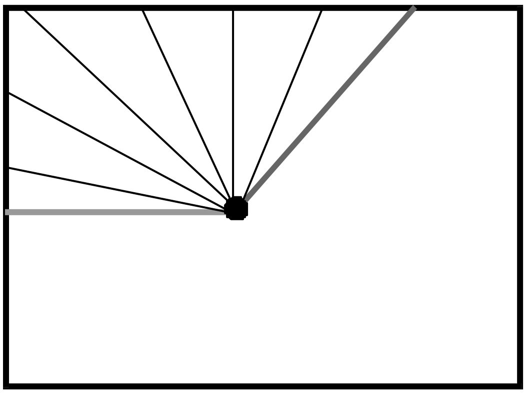
____

fig. 86



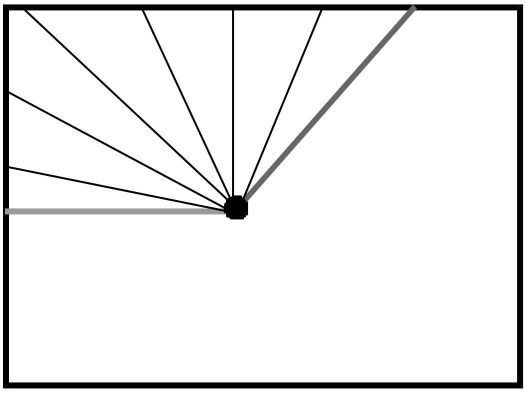
Disegna Luca e Gigi in modo che l'angolo contenente le semirette tracciate risulti davanti a Luca e dietro a Gigi.

Disegna e colora l'angolo che risulta dietro a Luca e davanti a Gigi.



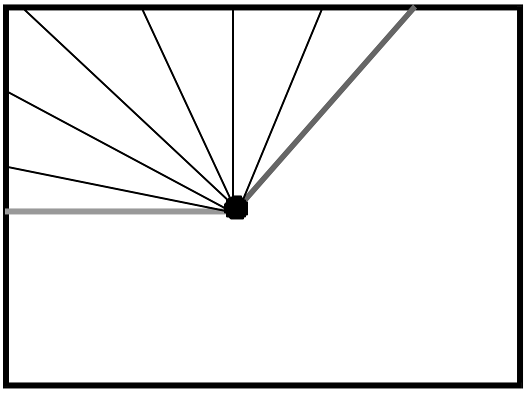
Disegna Aldo e Gino in modo che l'angolo contenente le semirette tracciate risulti dietro a Aldo e dietro a Gino.

Disegna e colora l'angolo che risulta davanti a Aldo e davanti a Gino.



Disegna Ebe e Mara in modo che l'angolo contenente le semirette tracciate risulti davanti a Ebe e davanti a Mara.

Disegna e colora l'angolo che risulta davanti a Ebe e dietro a Mara.



Disegna Eva e Leo in modo che l'angolo contenente le semirette tracciate risulti dietro a Eva e davanti a Leo.

Disegna e colora l'angolo che risulta dietro a Eva e dietro a Leo.

fig. 87

6.
CONCAVITA' E CONVESSITA'

I SEGMENTI PER INDAGARE LE REGIONI

Le parti di piano possono essere classificate in funzione dei risultati di indagini e verifiche condotte utilizzando come strumento il segmento.

- **Superficie piana CONCAVA**: *è ogni regione del piano tale che esiste almeno un segmento, con gli estremi appartenenti alla regione, non interamente contenuto nella regione.*
- **Superficie piana CONVESSA**: *è ogni regione del piano tale che tutti i segmenti, con gli estremi appartenenti alla regione, sono interamente contenuti nella regione*.

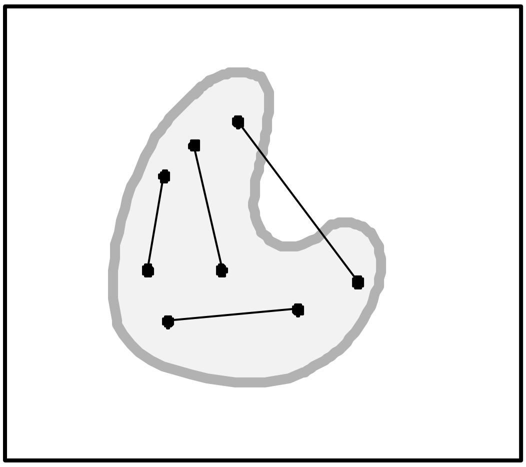


fig. 88

Si consideri una regione del piano come quella punteggiata nel disegno.
Si devono tracciare segmenti aventi gli estremi appartenenti alla figura. Fra tutti i segmenti che in tal modo si possono tracciare, alcuni sono interamente contenuti nella figura e, in certe situazioni, come quella rappresentata nel disegno, alcuni segmenti sono contenuti solo in parte.

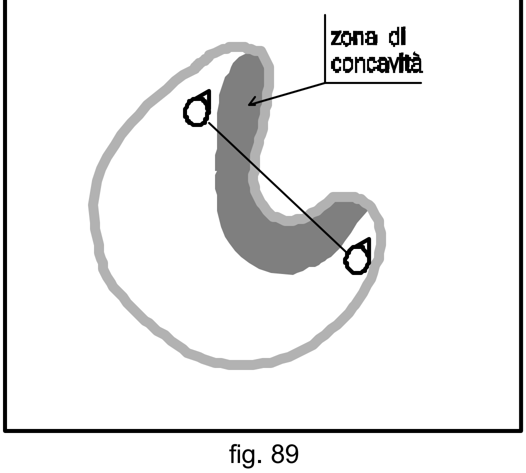


fig. 89

Se una figura permette di individuare solo segmenti interamente contenuti in essa, tale figura viene detta CONVESSA. Se anche un solo segmento, con gli estremi appartenenti alla figura stessa, non è interamente contenuta in essa, la figura viene detta CONCAVA e la zona dove il segmento fuoriesce dalla figura viene chiamata CONCAVITA' della figura o ZONA di CONCAVITA'.

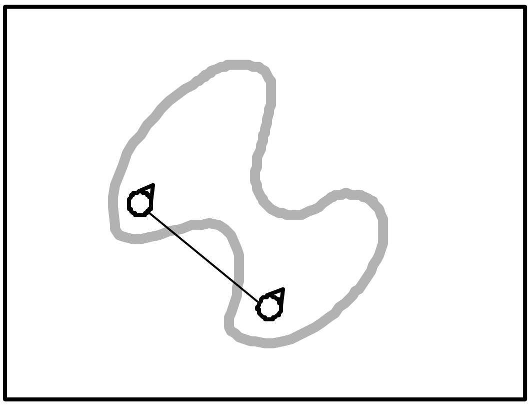


fig. 90

Sul piano-pavimento si stende una corda che costituisce la frontiera di una regione. Due bambini, tenendo teso tra di loro un elastico-segmento e spostandosi senza uscire dalla regione, la esplorano cercando eventuali situazioni in cui l'elastico attraversa la frontiera. Se i due bambini riescono a trovare almeno una situazione in cui l'elastico attraversa la frontiera, allora quella zona viene detta di CONCAVITA' e la figura CONCAVA. Se non si trovano zone di concavità, la figura viene detta CONVESSA.

L'esempio eseguito con figure con frontiere curvilinee può essere proposto analogamente: con angoli, con poligoni, con qualsiasi altra figura piana.

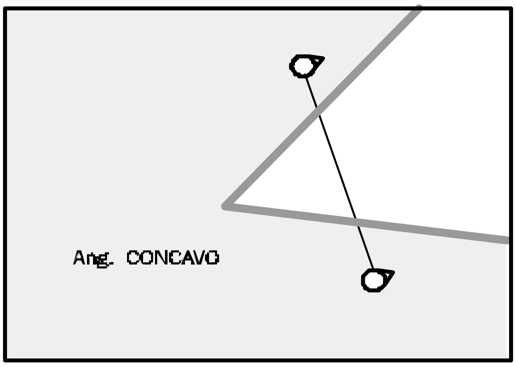


fig. 91

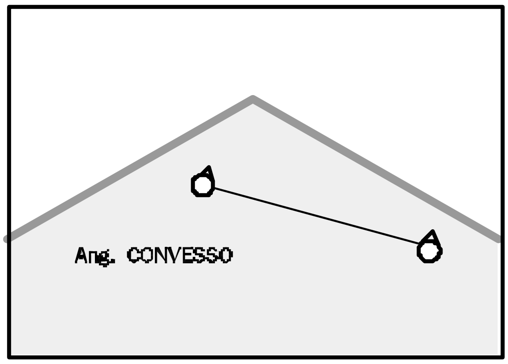


fig. 92

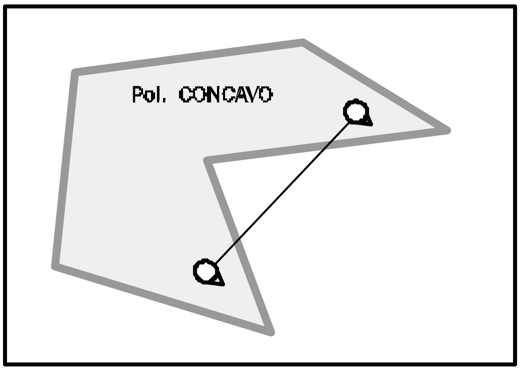


fig. 93

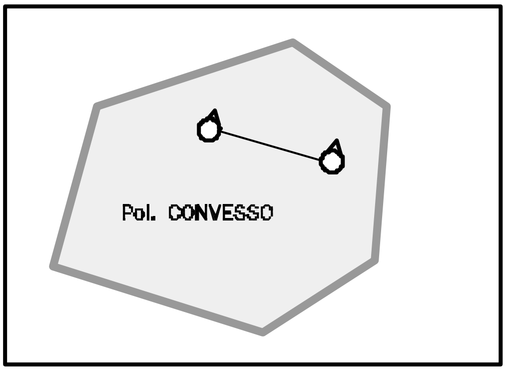
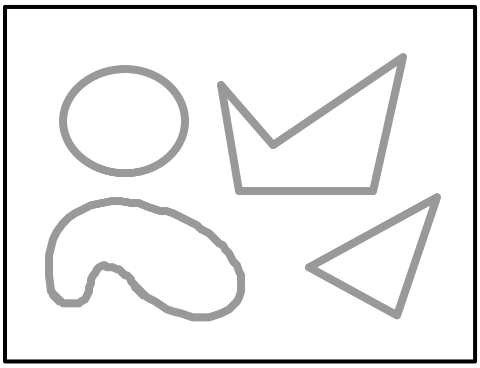


fig.94

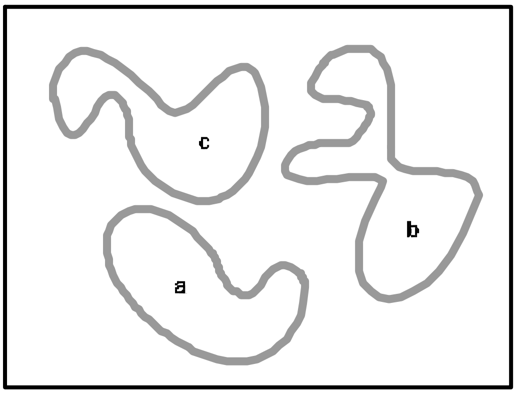
Esercizi simili si possono eseguire sul geopiano utilizzando elastici di un colore per definire la regione ed elastici di un altro colore per definire i segmenti. A livello grafico si propongono schede del tipo:



Evidenzia le zone di concavità tracciando segmenti rossi.

Colora le quattro regioni dentro le frontiere:
- di giallo quelle concave,
- di blu quelle convesse.

fig. 95



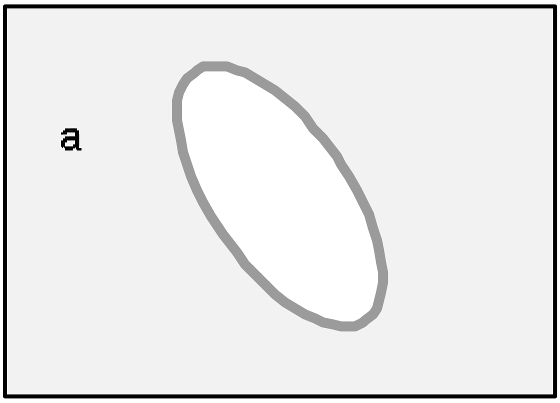
Le regioni dentro le frontiere sono tutte concave.

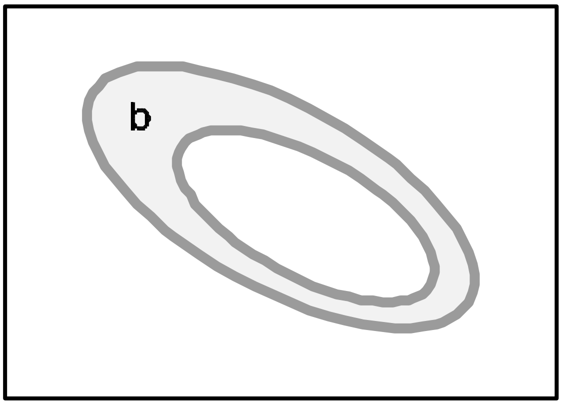
Colora di blu le parti di frontiera che individuano la zone di concavità.

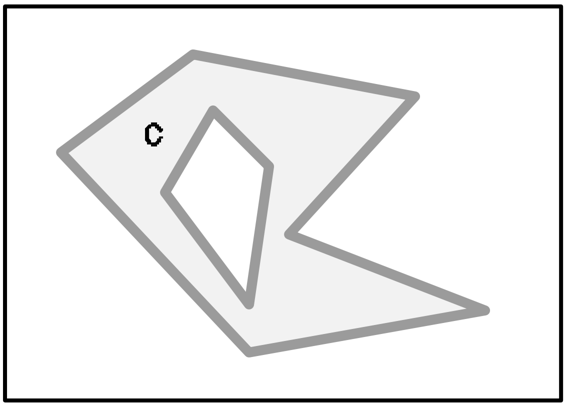
Quale regione ha il maggior numero di concavità ? _________

fig. 96

E' utile lavorare anche con le figure che non presentano le usuali caratteristiche, come ad esempio: quelle esterne ad..., oppure quelle delimitate da due frontiere disgiunte.
Altri esercizi proficui riguardano la composizione di regioni unendo regioni convesse elementari.







Prendi due punti delle figure punteggiate in modo che il segmento che li congiunge fuoriesca dalla zona punteggiata (attraversi la frontiera).

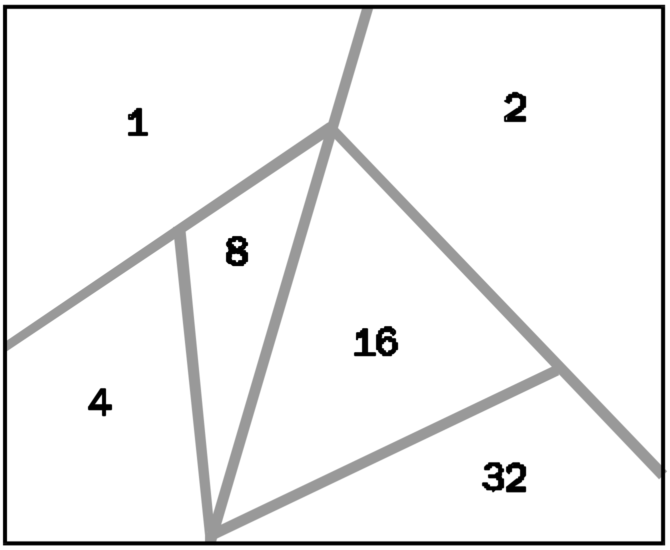
Traccia tale segmento e specifica se la figura punteggiata è concava o convessa:

- **a** è : ____________________
- **b** è : ____________________
- **c** è : ____________________

La figura **b** è delimitata da due frontiere. Traccia due segmenti con gli estremi nella figura: uno interamente appartenente alla figura, l'altro in parte dentro e in parte fuori.

La figura **c** contiene due concavità. Traccia due segmenti in modo da mostrare ciascuna di queste concavità.

fig. 97



Il piano è suddiviso in 6 regioni denominate con le valenze del sistema binario.

La regione "3" viene individuata considerando la unione fra la regione "1" e la regione "2".
Nello stesso modo la regione "35" è quella formata dall'unione delle tre regioni: "32", "2", "1".

Completa le tabelle sottostanti segnando con crocette le caselle opportune:

	REGIONI												
	1	9	5	18	12	3	34	7	60	19	48	13	50
CONVESSE													
CONCAVE													

	REGIONI											
	1	16	4	3	7	28	12	35	24	48	13	60
ANGOLI												
NON ANGOLI												

fig. 98

Esercizi analoghi a quanto visto in quest'ultima scheda possono essere proposti anche a livello manipolatorio utilizzando, ad esempio, il TAMGRAM.

SEMIPIANO E ANGOLO PIATTO

Un modo particolarmente interessante (semplice per il bambino) per introdurre l'angolo piatto è quello legato alla concavità-convessità:

- **Angolo Piatto**: *è il maggiore degli angoli convessi*. Questo significa che ogni angolo maggiore di un angolo piatto è un angolo concavo. L'angolo piatto può essere ritenuto *la frontiera fra la concavità e la convessità negli angoli*.
- **Semipiano**: *è ogni parte convessa del piano che ha come frontiera una e una sola retta*.

N.B. Il termine SEMIPIANO non indica una situazione quantitativa, perciò non significa la metà esatta del piano.

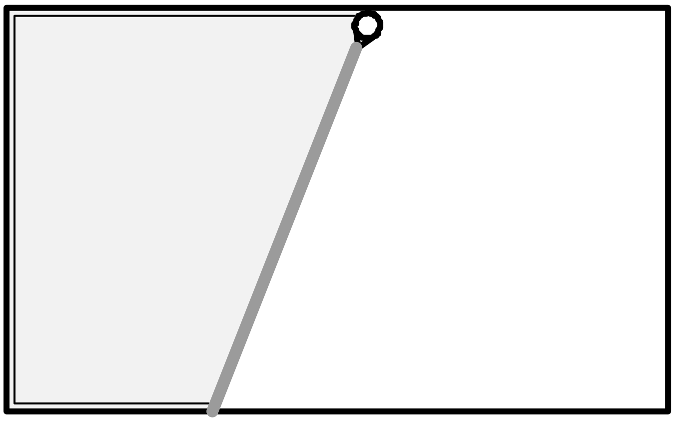


fig. 99

Un bambino parte dal confine del piano, percorre una retta e dal punto raggiunto ritorna al punto di partenza percorrendo una parte del confine del piano.
In tal modo il bambino ha delimitato una parte di piano che, a causa del tipo di frontiera, non è né un poligono né un angolo. Infatti poligoni e angoli non hanno come frontiera una retta. Tale parte di piano viene chiamata SEMIPIANO.

Una retta divide il piano in due semipiani e solo con la retta si può dividere il piano in due regioni convesse. Qualunque altra linea che divida il piano in due regioni forma almeno una regione concava:

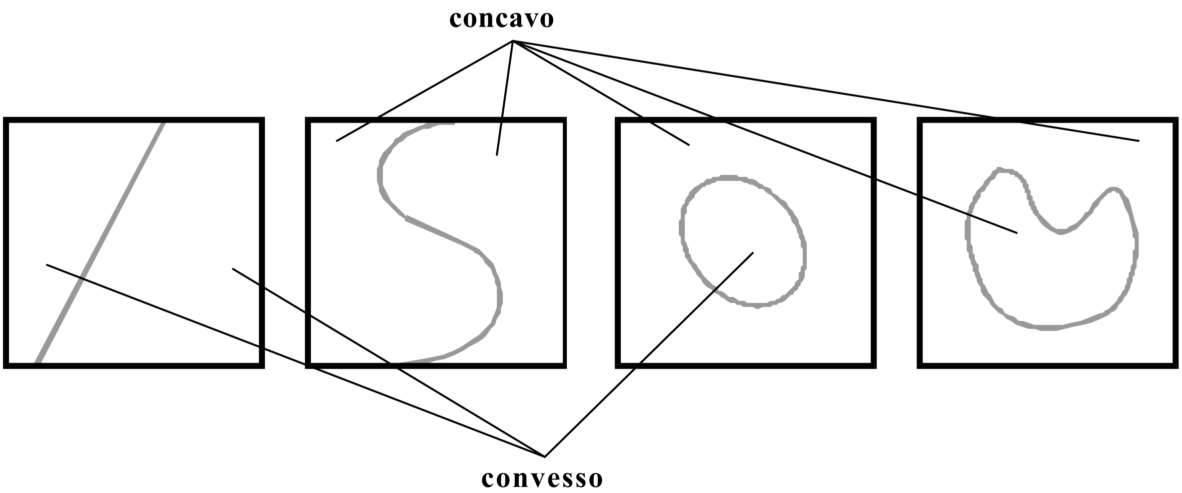


fig. 100

Per prospettare al bambino l'angolo piatto è opportuno riprendere gli esercizi proposti nel paragrafo sugli angoli PARTICOLARI facendo lavorare coppie di bambini che tendono tra loro un elastico e, mentre un bambino rimane sul vertice, l'altro percorre il confine dell'angolo.

Si chiede a un bambino di descrivere un angolo convesso.
Il bambino che descrive l'angolo parte dal vertice, percorre una corda rossa messa come semiretta di partenza, percorre una parte del confine del piano rasentando la parete e, quando decide di ritornare sul vertice, viene posta una corda di colore diverso dalla prima (ad esempio blu) per indicare la semiretta del rientro.

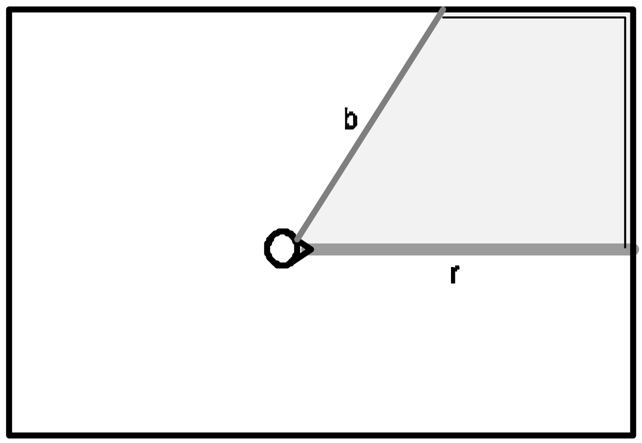


fig. 101

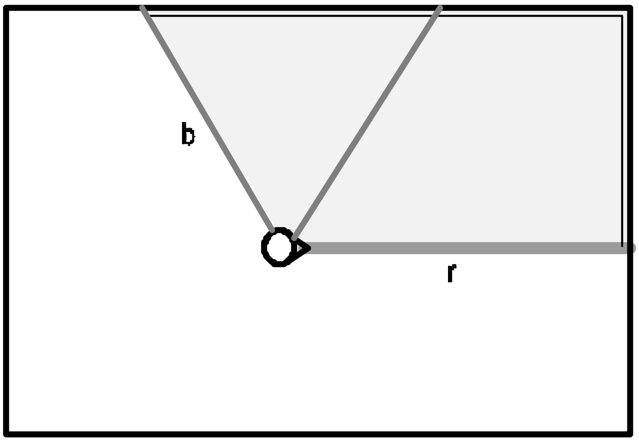


fig. 102

Un altro bambino viene invitato a descrivere un angolo convesso maggiore del precedente. Il risultato viene evidenziato spostando la corda blu.

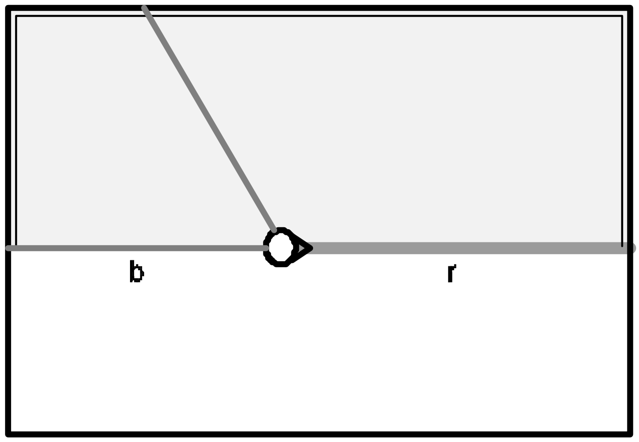


fig. 103

Analogamente si procede per altri bambini fino a quando si pone come condizione di trovare l'angolo convesso più grande possibile, oltre il quale gli angoli diventano concavi.
L'angolo così ottenuto e raffigurato mediante due semirette che, unite, formano una retta, viene chiamato **ANGOLO PIATTO**.

Si può concludere che l'angolo piatto è equivalente a un semipiano: l'unica differenza sta nel modo di interpretare la frontiera. Nel semipiano la frontiera è una retta, mentre nell'angolo piatto è costituita da due semirette con l'origine in comune.

CONCAVITA' E CONVESSITA' CON I RAPPORTI TOPOLOGICI

Pur rimanendo la definizione di concavità e convessità matematicamente legata all'uso del segmento, è possibile, in alcuni casi particolari (figure del piano aventi una sola frontiera), utilizzare un rapporto topologico direzionale (davanti-dietro, destra-sinistra) per classificare le figure piane in concave o convesse.

Si dispongono nel piano due corde di colore diverso che individuano due regioni dentro come da disegno.

Il bambino si pone sulla frontiera rossa orientato verso l'interno, e deve dire se la intera regione è davanti a lui. Spostandosi lateralmente sulla frontiera, continua a verificare se la regione rimane sempre interamente davanti a lui.

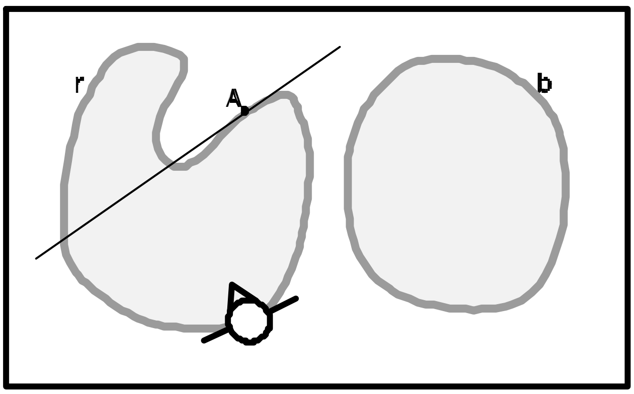


fig. 104

Arrivato nella posizione **A**, constaterà che una parte della regione è dietro di lui.

Percorrendo la frontiera blu dell'altra regione, non si verifica mai tale situazione: per questo motivo le figure sono diverse e si classificano in CONCAVA la prima e CONVESSA la seconda.

Alla stessa definizione di concavità-convessità si può giungere utilizzando il rapporto topologico: destra/ sinistra.

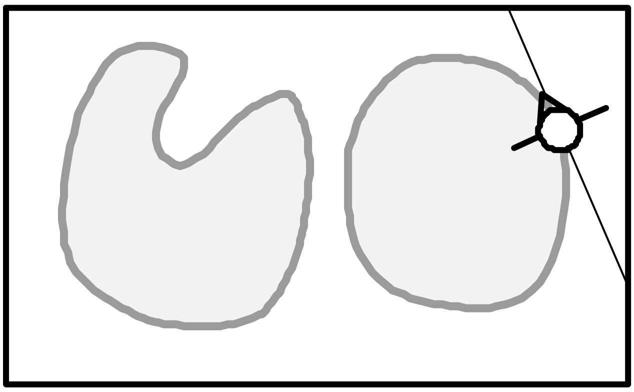


fig. 105

Se, percorrendo la frontiera, l'intera figura rimane sempre a destra o sempre a sinistra, è convessa; al contrario, se esiste una posizione in cui la figura viene a trovarsi in parte a destra e in parte a sinistra, allora la figura viene detta concava.

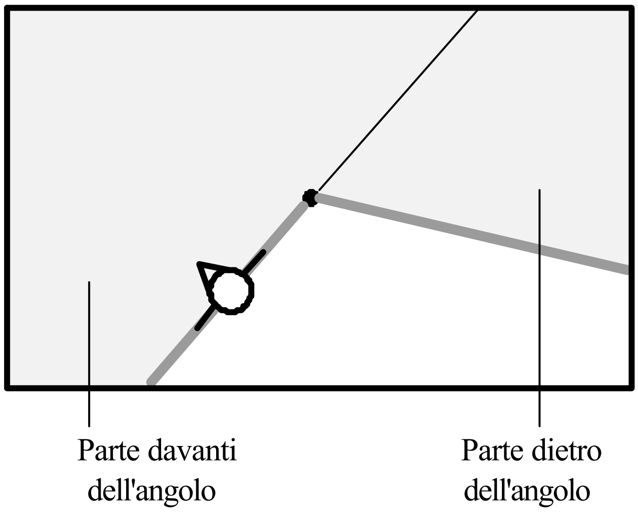
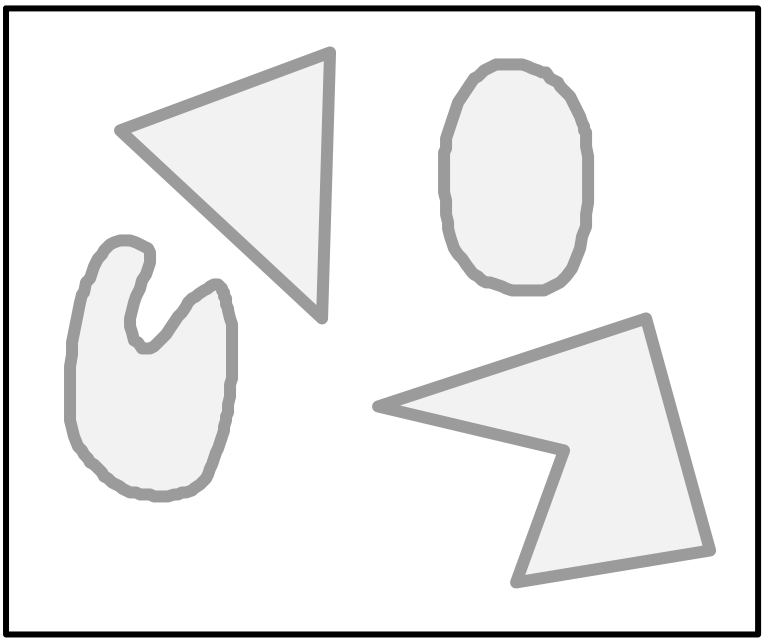


fig. 106

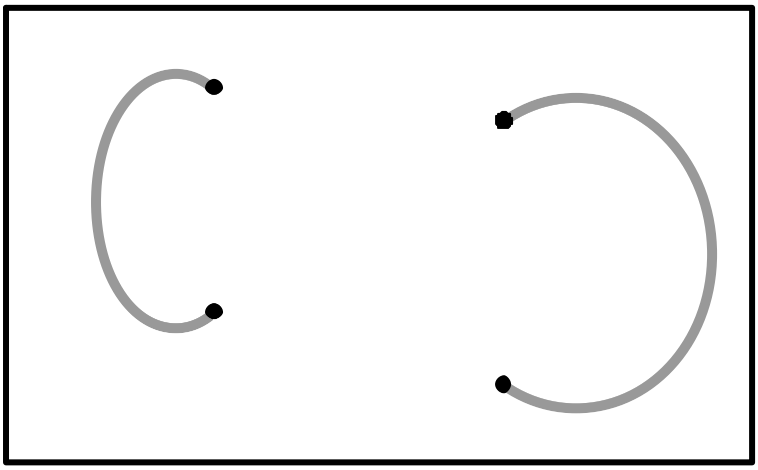
Le definizioni euclidee di ANGOLO CONCAVO e di ANGOLO CONVESSO si rifanno all'indagine di tipo topologico; infatti il bambino posto sulla frontiera (un punto di una semiretta) vede l'angolo in parte davanti e in parte dietro se questo è CONCAVO e il suo piano corporeo trasversale che divide l'angolo in davanti-dietro identifica il prolungamento del lato considerato.

SCHEDE SULLA CONCAVITA'-CONVESSITA'



Disegna, sulle frontiere delle figure che risultano concave, il simbolo di un bambino in modo che le regioni risultino in parte davanti e in parte dietro rispetto al suo piano corporeo che individua il davanti-dietro.

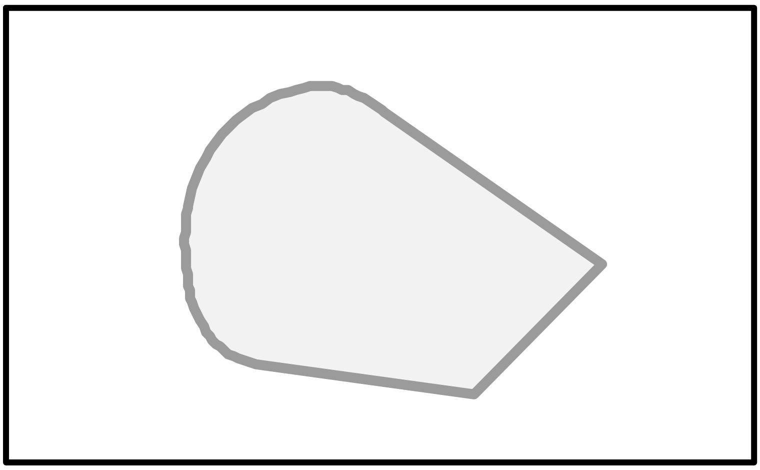
fig. 107



Completa la linea AB di frontiera in modo da delimitare una regione CONVESSA.

La linea CD la devi completare in modo da delimitare una regione CONCAVA.

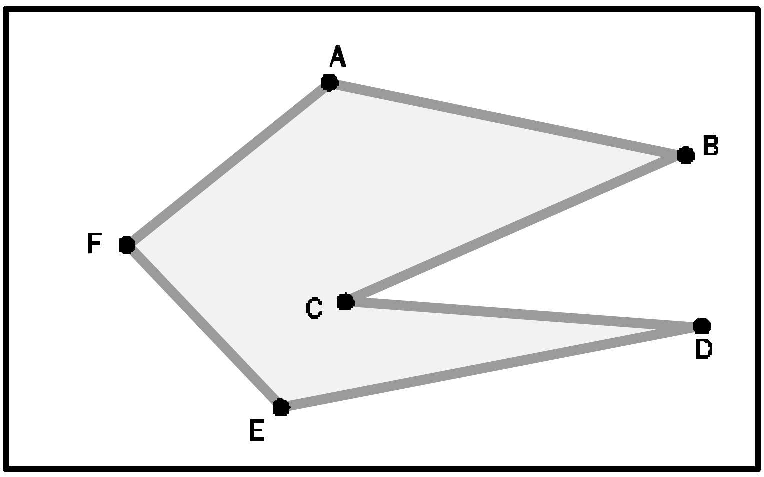
fig. 108



Nella regione convessa traccia una linea rossa in modo da ottenere due figure: una CONCAVA e l'altra CONVESSA.

Dividi la parte convessa ottenuta con una linea blu, in modo da dividerla in due parti entrambe concave.

fig. 109

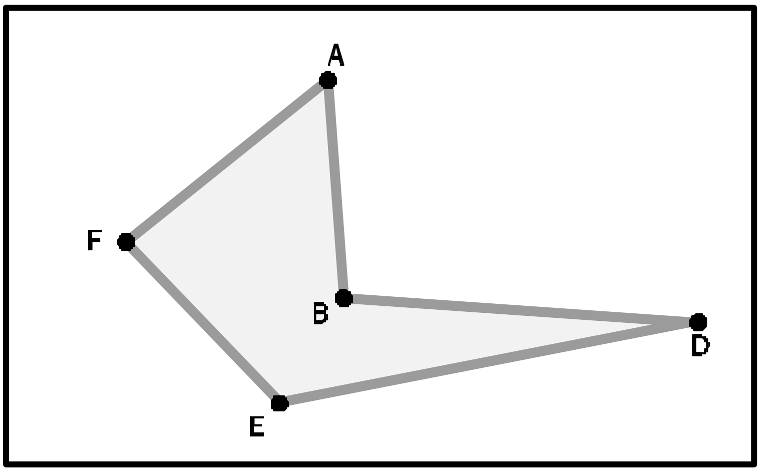


Traccia una diagonale che divide l'esagono concavo in due poligoni CONVESSI.

Si può tracciare una diagonale tutta esterna al poligono ?________

Traccia una diagonale che è in parte dentro e in parte fuori dal poligono.

fig. 110

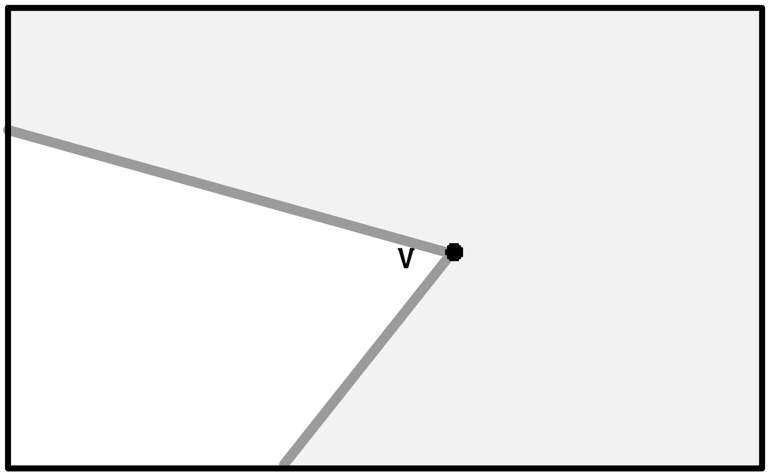


Al pentagono concavo ABDEF devi unire un quadrilatero in modo da ottenere un nuovo pentagono CONVESSO. Disegnalo e colora il nuovo pentagono.

Nel nuovo pentagono convesso, è possibile tracciare almeno una diagonale che risulti esterna al poligono ?

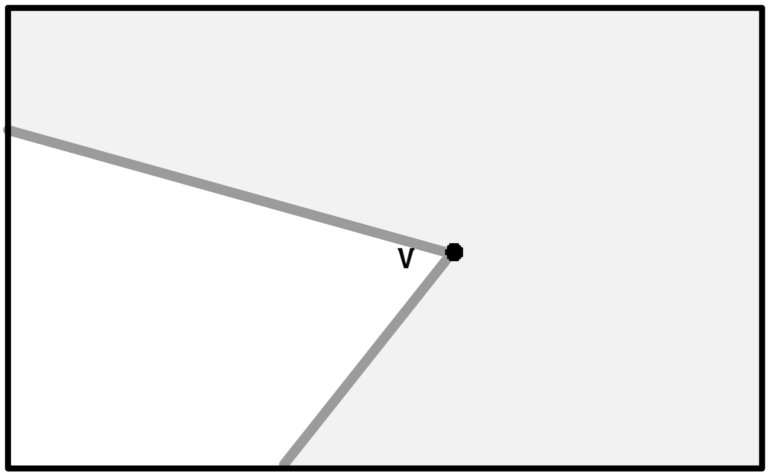
____

fig. 111



Traccia una semiretta, uscente dal vertice V, in modo da dividere l'angolo concavo in due angoli convessi. Colorali uno di giallo e l'altro di azzurro.

Unendo l'angolo convesso giallo con l'angolo non punteggiato ottieni un angolo concavo o convesso ? ____________



Traccia una semiretta, uscente dal vertice V, in modo da dividere l'angolo convesso in due angoli.
Colorali uno di verde e l'altro di rosso.

Se all'intero piano togli l'angolo convesso rosso ottieni un angolo concavo o convesso ? ______

fig. 112

7.
ANGOLI DI UN POLIGONO

ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO

Angolo interno di un poligono: *è ogni angolo che ha per vertice un vertice del poligono, che ha per lati le semirette che contengono i lati del poligono e contiene la parte di poligono compresa fra i due lati consecutivi.*

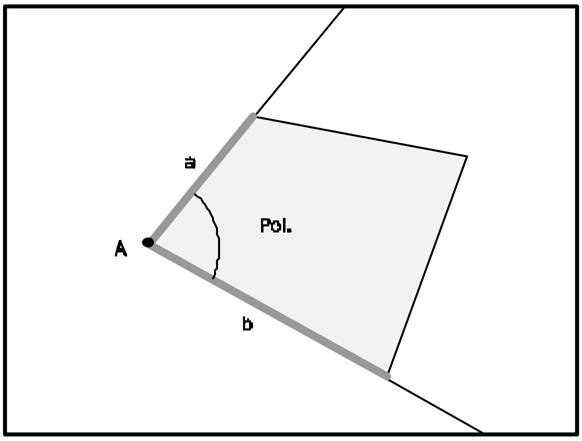


fig. 113

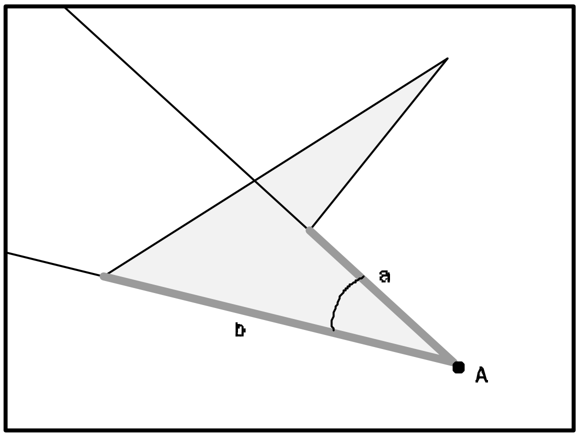


fig. 114

In un poligono si consideri un vertice A e i due lati consecutivi ("a" e "b") aventi tale vertice in comune.
Partendo dal vertice A, i due lati "a" e "b" indivi-duano due semirette aventi per origine il vertice. Tali semirette suddividono il piano in due angoli, uno dei quali contiene tutto il poligono quando questo è convesso o, in alcuni casi, contiene la parte di poligono compresa tra i due lati "a" e "b", quando questo è concavo. In entrambi i casi questi angoli vengono definiti **ANGOLI INTERNI** del poligono.
Ogni poligono ha tanti angoli interni quanti sono i suoi vertici e quindi quanti sono i suoi lati.

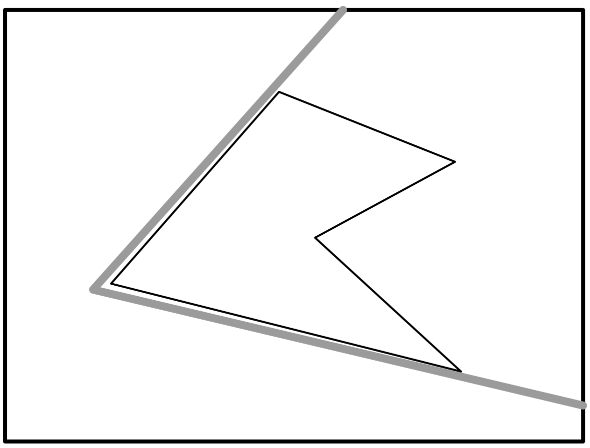


fig. 115

Si delimita sul pavimento, con un nastro adesivo, un pentagono concavo. I bambini, con delle corde, devono indicare un angolo interno del poligono che contenga interamente il poligono.
L'uso delle corde serve per rimarcare che non è il poligono che contiene l'angolo, ma è l'angolo (individuato tramite le due semirette) che contiene il poligono o parte di esso.

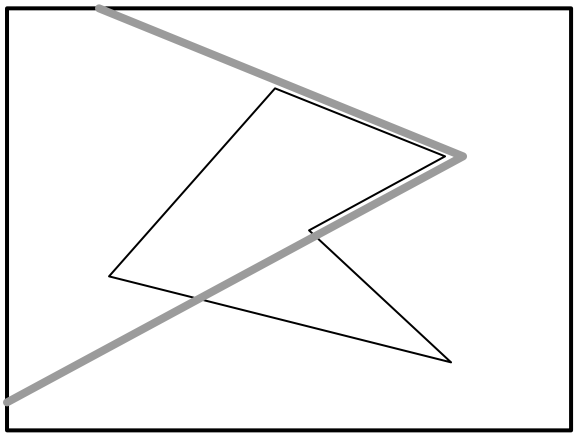


fig. 116

Sullo stesso poligono si chiede di disporre le corde in modo da individuare un angolo interno contenente solo una parte del poligono.

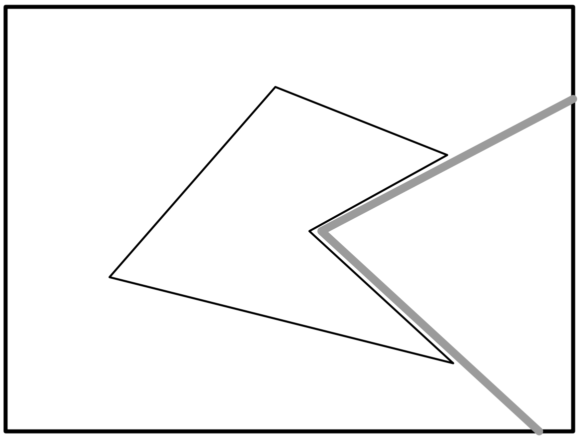
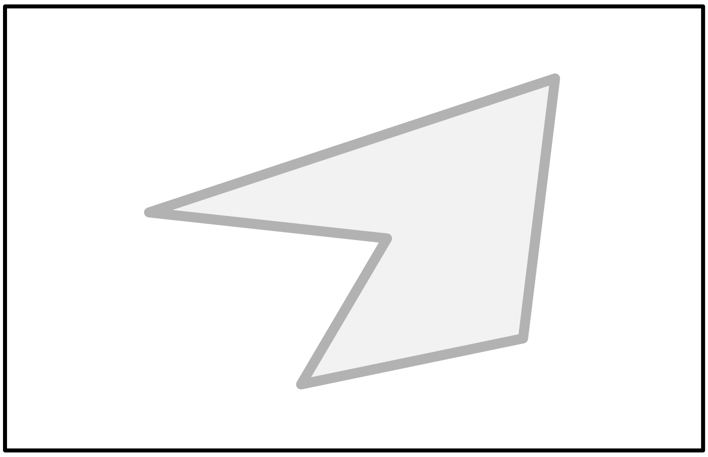


fig 117

Disporre due corde in modo da individuare un angolo concavo interno del poligono. Questo angolo contiene interamente il poligono ?

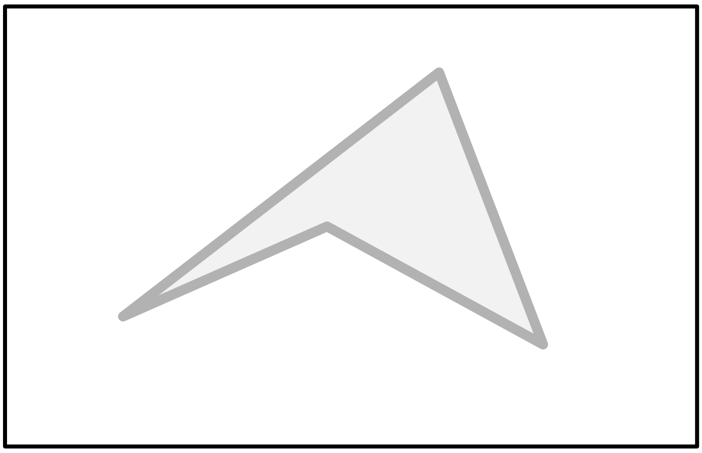
SCHEDE SUGLI ANGOLI INTERNI



Traccia i lati di un angolo interno del pentagono che non contenga interamente il pentagono.

Colora di giallo tale angolo e colora di blu la parte del poligono non contenuta nell'angolo.

fig. 118

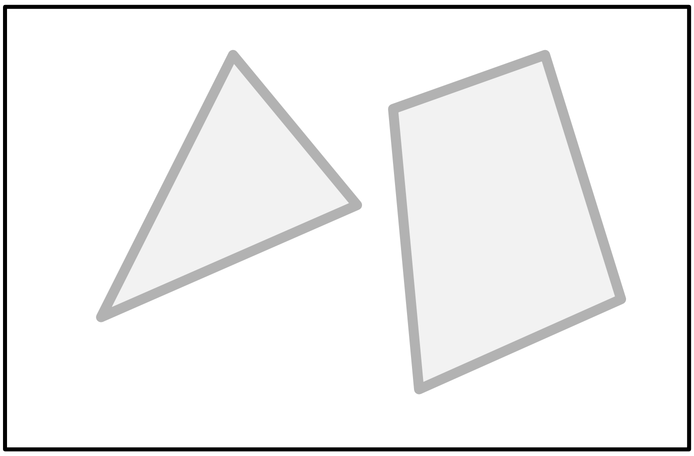


Traccia i lati dell'angolo interno concavo del poligono.

Colora l'angolo corrispondente non interno.

L'angolo colorato è concavo o è convesso? __________________

fig. 119

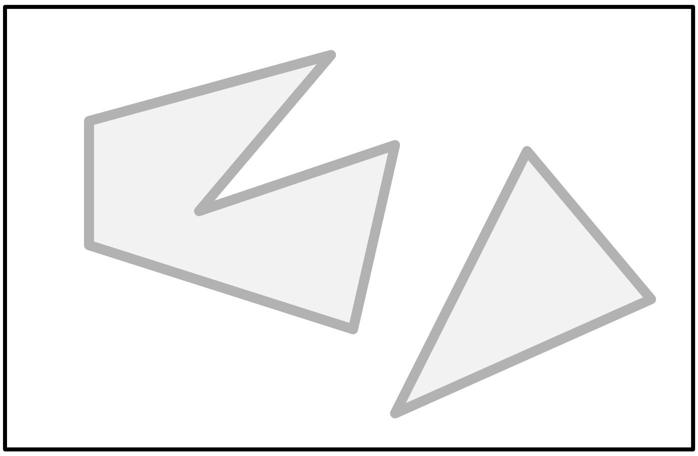


Traccia l'angolo interno del quadrilatero che contenga anche il triangolo.

E' possibile trovare un angolo interno del triangolo che contenga interamente il quadrilatero? _____________

Traccia un angolo interno del triangolo che non contenga il quadrilatero.

fig. 120

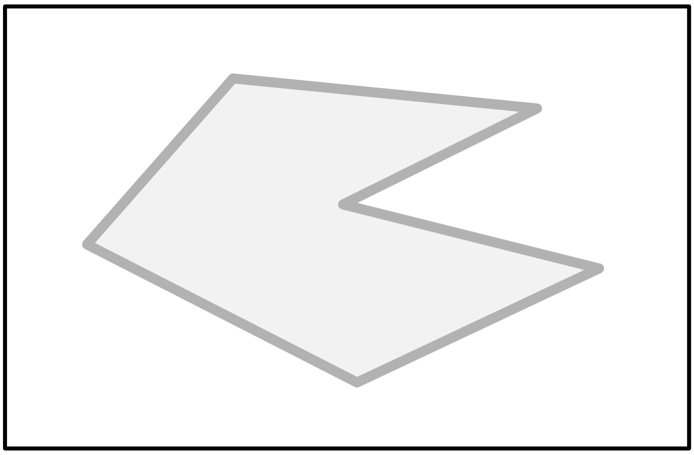


L'angolo interno concavo dell'esagono contiene interamente il triangolo ? _________________

Traccia un angolo interno convesso dell'esagono che contenga l'intero eagono e una parte del triangolo.

Traccia con il rosso i lati dell'angolo interno del triangolo capace di contenere entrambi i poligoni.

fig. 121



Traccia le due semirette, con vertice in A, che individuano l'angolo interno dell'esagono.

Traccia con il rosso le diagonali dell'esagono che sono contenute interamente nell'angolo interno tracciato.

Traccia con il blu le diagonali che non sono interamente contenute o che sono esterne all'angolo.

fig. 122

8.
LE METRICHE IN GEOMETRIA

CONDIZIONI PER AVERE UNA METRICA

La metrica permette di creare una corrispondenza tra entità appartenenti ad una determinata categoria e l'insieme dei numeri reali.
Il numero reale che, a determinate condizioni, risulta corrispondente all'entità, viene chiamato *misura dell'entità*.
L'uomo associa alle diverse realtà degli aggettivi quantitativi che tendono ad esprimere il confronto tra una realtà ed un'altra. Ne sono esempi le frasi del tipo:

- il perimetro del triangolo è il più grande;
- Aldo è più simpatico di Andrea;
- l'amore di Giulio è grandissimo;
- Marco è il più bello;
- la corrente è di 3 Amper;
- ...

Gli aggettivi quantitativi usati sono espressioni che, da sole, non bastano per avere una misura.
Infatti, quando un giudice deve esprimere il giudizio relativo al comportamento di un individuo, deve "soppesare" tutti gli elementi che hanno portato in giudizio il giudicando, pertanto il suo parere ha una valenza quantitativa oltre che qualitativa. In pratica il giudizio è il risultato di una valutazione quantitativa fatta, in questo caso, su un individuo.
Anche i rapporti affettivi vengono espressi solitamente con aggettivi quantitativi.
Queste valutazioni non sono metricamente accettabili perché si servono di aggettivi non numerabili; infatti una frase del tipo "*oggi ti amo il doppio di ieri*" non ha alcun senso, mentre "*oggi ti amo più di ieri*" ha un significato.

Gli aggettivi quantitativi non numerali possono dare adito ad interpretazioni non univoche.
Ad esempio: "*l'aumento di stipendio è stato rilevante*", usando gli aggettivi numerali può diventare: "*l'aumento di stipendio è stato del 6%*".
Analogamente: "la probabilità che un volo spaziale non finisca in catastrofe è del 98%". Per l'astronauta che deve compiere il volo, il 98% di riuscita è un margine esiguo, pretende maggior sicurezza.

Perciò *il 6% è rilevante* e *il 98% è esiguo* nelle due realtà.

Per superare il discorso semplicemente quantitativo e giungere ad una metrica, è necessario rispettare le seguenti condizioni:

1 *deve esistere una mappa (corrispondenza univoca) tra entità e numero cardinale, cioè ad ogni entità deve corrispondere un numero e uno solo;*
2 *se due entità omogenee sono una maggiore dell'altra, allora i rispettivi numeri corrispondenti sono uno maggiore dell'altro;*
3 *se due entità omogenee sono in rapporto, ad esempio la prima è equivalente a "n" volte la seconda, allora anche i rispettivi numeri corrispondenti sono nello stesso rapporto, cioè il primo numero è "n" volte il secondo.*
Questa è la condizione di mantenimento dei rapporti tra le grandezze e i corrispondenti numeri.

Si riportano di seguito alcuni esempi di situazioni non valide da un punto di vista metrico:

ESEMPIO 1:
L'espressione "*oggi ti voglio più bene di ieri*", pur esprimendo una valutazione quantitativa, non esprime una situazione metrica perché non soddisfa nemmeno la prima condizione.

ESEMPIO 2:
Partendo dal punto P "misuriamo" la strada percorsa con i numeri civici delle abitazioni.

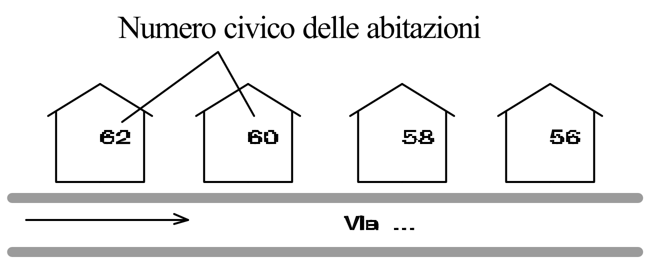


fig. 123

La 1° condizione è soddisfatta, perché ad ogni percorrenza corrisponde un solo numero, ma non sono soddisfatte le altre due perché a percorso maggiore corrisponde numero civico minore.

ESEMPIO 3:
Ci si propone di misurare un angolo acuto euclideo con il seguente metodo: viene tracciata la semiretta OA e , da un punto H, viene tracciata un'altra semiretta HK sulla quale sono stati posti i numeri reali positivi a partire da 0.

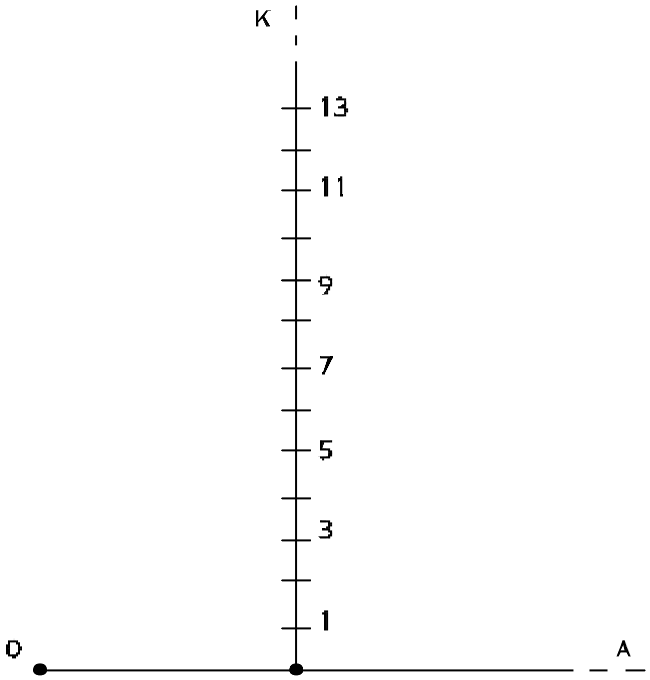


fig.124

Un angolo, per essere in tal modo misurato, viene posto col vertice in O, con un lato coincidente con la semiretta OA e dove l'altro taglia la semiretta HK si rileva un numero che non può essere considerato misura dell'angolo. Infatti: l'angolo AOB "misura" 6; l'angolo AOC "misura" 12.

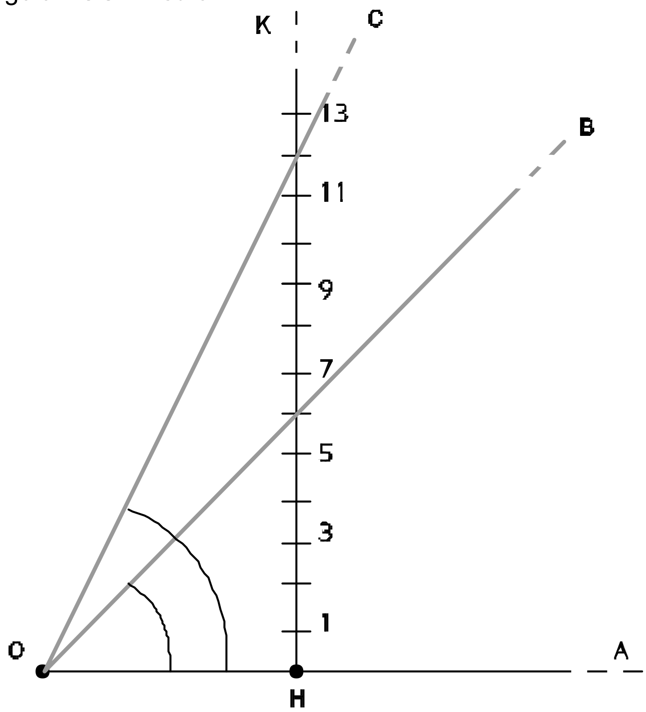


fig. 125

.

La prima condizione è soddisfatta in quanto ad ogni angolo corrisponde uno e un solo numero; la seconda è soddisfatta in quanto ad angolo maggiore corrisponde numero maggiore:

$$\widehat{AOC} > \widehat{AOB} \Longrightarrow 12 > 6$$

La terza condizione non è soddisfatta perché non esiste la diretta proporzionalità: 12 è il doppio di 6 ma l'angolo AOC non è il doppio dell'angolo AOB.
Questo modo di misurare gli angoli acuti non è accettabile.

METODI PER AVERE UNA METRICA

Per ottenere una metrica corretta, gli insegnanti utilizzano il METODO DEL CAMPIONE, sia come contenenza, sia come equivalenza.
Ad esempio:
- "*una corda è lunga 3 bastoni*" significa che il campione "bastone" è riportato tre volte sulla corda;
- "*un libro pesa come tre astucci*" significa che il peso del libro è equivalente al peso di 3 astucci (l'astuccio è un campione).

Per uniformare la metrica attraverso la metodologia del campione si parla in ogni caso di equivalenza, anche se, all'inizio, con il bambino si usa comunemente il termine contenenza: se lo spigolo della stanza è lungo 4 bastoni, perché il bastone è stato riportato esattamente 4 volte, si dirà che lo spigolo è, in lunghezza, equivalente a 4 bastoni.
Parlare in termini di contenenza e quindi usare questo concetto può andare bene per le metriche lineari, per le capacità, in parte per le aree, ma non può essere usato per i pesi e nemmeno per molte altre grandezze fisiche come la luminosità, la temperatura, la corrente, la velocità, ecc.

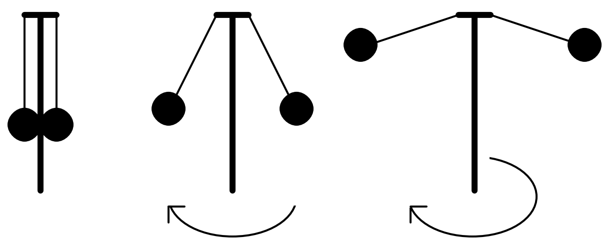
La metodologia che si basa sull'uso del campione sembra risolvere ogni problema relativo alle metriche, ma se si considera, ad esempio, la misurazione della temperatura, ci si rende conto che *il grado centigrado,* *unità di misura della temperatura, non esiste come campione* e la metrica delle temperature deve essere basata su una metodologia diversa da quella sopra esposta. In particolare, nel caso specifico, si ricorre alla diretta proporzionalità tra la variazione di temperatura e la variazione di volume.

E' molto frequente **misurare grandezze fisiche ricorrendo a grandezze di altra natura**.
Ad esempio:

- *la temperatura misurata attraverso le lunghezze*:
  si sa che fra lo stato termometrico e lo stato volumetrico delle sostanze esiste una relazione di diretta proporzionalità (salvo per alcune sostanze in particolari situazioni vicine ai cambiamenti di stato). Se la sostanza mantiene una sezione costante il suo volume è direttamente proporzionale alla sua altezza. Ma allora introducendo mercurio liquido all'interno di un contenitore avente sezione costante, si ottiene una diretta proporzionalità fra le altezze della colonnina di mercurio e gli stati termometrici del liquido stesso. In tal modo la misura della temperatura è ottenuta con l'uso di una misura lineare;

- *la corrente in un circuito misurata attraverso le ampiezze angolari*:
  la corrente elettrica crea sempre, nello spazio circostante, un campo magnetico che interagisce con altri campi magnetici presenti. Se nelle immediate vicinanze di un filo conduttore si pone un ago magnetico (potrebbe essere una bussola), questo cambia la sua direzione se nel filo passa corrente elettrica e, più è intensa la corrente, maggiore è il cambiamento di direzione. E' sufficiente creare una corrispondenza numerica fra le due grandezze e si possono creare strumenti di lettura delle correnti.;

- *la velocità di traslazione di un veicolo misurata attraverso le ampiezze angolari*:
  la velocità di spostamento di un veicolo a ruote è in corrispondenza alla velocità angolare delle ruote. La velocità angolare, mediante un cavo d'acciaio, viene trasmessa ad un bilanciere che ruota attorno al proprio asse.



  Se la velocità è nulla l'angolo formato fra le due aste che reggono i pesi è nullo ma, all'aumentare della velocità, per forza centrifuga, i pesi si allontanano dall'asse di rotazione e l'angolo formato dalle due aste non è più nullo. Maggiore è la velocità, maggiore è l'angolo che si viene a formare e, con una opportuna corrispondenza numerica, si possono creare semplici tachimetri;

- *la distanza misurata attraverso il tempo*:
  per misurare quanto la luna dista dalla terra non si può ricorrere al campione che deve essere riportato più volte fino a completare il ricoprimento della distanza. La luce viaggia, negli spazi siderali, a velocità costante quindi la distanza fra due corpi è tanto maggiore quanto più elevato è il tempo che la luce impiega a percorrere la distanza. Se un congegno è capace di emettere e ricevere un raggio luminoso, marcando l'intervallo di tempo che passa dall'emissione alla ricezione, si può calcolare la distanza percorsa dal raggio.

Questo porta a riesaminare le metodologie utilizzate per affrontare il problema delle metriche con i bambini.
Quella dei campioni è la più semplice e quindi la più adatta per i bambini che affrontano per la prima volta questo argomento, tuttavia non è l'unica e, se l'uso dei campioni può dar luogo ad artificiosità (come nel caso della misura dell'angolo, dove il campione può solo dare un'idea di angolo campione ma non è un angolo, è un triangolo o un triangoloide), si ricorre all'altra metodologia, ad esempio, per quanto riguarda gli angoli, si può misurare l'angolo come variazione di direzione.

Nella scuola elementare si devono affrontare diverse metriche:

- **lunghezza,**
- **peso,**
- **capacità,**
- **estensione** (area)**,**
- **ampiezza,**
- **tempo.**

Mentre la prime quattro sono proponibili con l'uso del campione, le altre due risultano più chiare e più semplici da apprendere se proposte come legate da altre grandezze.

9.
METRICA DELLE LUNGHEZZE

FASI DI UN PERCORSO

Questa metrica, che si sviluppa in ambito geometrico, deve essere proposta contemporaneamente ad altre metriche, come quelle relative ai pesi dei corpi e alle capacità dei contenitori.
Questo perché lunghezza, peso e capacità vengono affrontati con la metodologia dei campioni e le diverse fasi che vengono sviluppate coincidono.
Si affronterà, in questo capitolo, il discorso delle lunghezze e verrà trascurato quello dei pesi e delle capacità, dato che può essere ricostruito facilmente da ogni insegnante con un procedimento analogo a quello che verrà esposto.

Il percorso è costituito dalle seguenti fasi:

- l'impiego del campione arbitrario;
- l'impiego del campione geometrico;
- l'impiego dei pluricampioni;
- l'impiego dei pluricampioni in rapporto;
- l'impiego dei pluricampioni in rapporto costante;
- l'impiego dei pluricampioni in rapporto decimale;
- l'impiego dei pluricampioni secondo le convenzioni internazionali;
- il passaggio dalla misura espressa con tutti i campioni usati alla registrazione della stessa con riferimento ad un solo campione e viceversa.

1^ FASE: CAMPIONI ARBITRARI

Le esperienze di gioco, con le relative esigenze di confronti di grandezze, portano spontaneamente il bambino ad utilizzare dei campioni arbitrari, che variano di volta in volta, ma che tendono ad esprimere la dimensione con numeri e quindi a creare quella corrispondenza tra l'entità misurata e il numero che la esprime.
Ne sono esempio:
- nel gioco del calcio, la larghezza delle porte viene rilevata con i passi;
- nel gioco delle biglie, la distanza viene misurata a spanne o a pollici;
- nel gioco delle figurine lanciate contro il muro, vince chi ha lanciato più vicino al muro e la misura viene presa in dita.

Questi campioni arbitrari non sono validi, in senso geometrico, perché:
- variano da bambino a bambino, pur essendo denominati nello stesso modo;
- variano pur essendo riprodotti dallo stesso bambino, ad esempio il passo;
- si possono utilizzare solo in determinate condizioni, ad esempio i passi non possono servire per misurare l'altezza di una porta;
- non possono essere utilizzati contemporaneamente da più persone.

Le proposte di esercizi che utilizzino questi campioni arbitrari devono essere fatte in maniera da evidenziare i limiti ed i difetti e devono far sorgere il bisogno di usare campioni più idonei:

1) misura con i tuoi passi la larghezza della tua camera;

2) misura con i tuoi passi la distanza dal cancello all'ingresso della scuola;

3) Aldo misura, con i suoi passi, la lunghezza del percorso dalla porta dell'aula alla porta dei servizi, mentre Luisa misura, con i suoi passi, la lunghezza del percorso dalla porta dell'aula alla porta del laboratorio psicomotorio.

Bisogna scegliere percorsi che non siano vistosamente diversi.
I risultati possono essere:

aula --> servizi: 25 passi di Aldo;
aula --> laboratorio: 27 passi di Luisa.

Le domande devono tendere a far comprendere ai bambini la impossibilità di confrontare i risultati:
Qual è il percorso più lungo?
Se la risposta dovesse essere "dall'aula al laboratorio" perché il percorso è espresso dal numero maggiore, occorre riportare l'attenzione sulla diversità dei campioni usati ed evidenziare che la lunghezza di 27 passi di Luisa non è necessariamente maggiore della lunghezza di 25 passi di Aldo.

4) Ogni bambino deve misurare la lunghezza del corridoio utilizzando i passi.
Si confrontano poi i risultati registrati in una tabella a doppia entrata:

	Numero passi fatti							
	5	6	7	8	9	10	11	12
ALDO				x				
EBE						x		
GIORGIO			x					
MARIA					x			
LUISA							x	
PAOLO					x			
MARCO		x						
FULVIO			x					
ELENA						x		
CINZIA					x			
NICOLA				x				

Domande:
- Quanti passi è lungo il corridoio secondo Maria?
- E secondo Marco?
- Cosa hanno misurato Maria e Marco?
- In che modo hanno misurato il corridoio?
- Come mai il risultato ottenuto da Maria è diverso dal risultato ottenuto da Marco?
- Guardando la tabella, chi ha il passo più lungo?
- Chi ha il passo più corto?
- Che cosa è necessario fare per poter confrontare la lunghezza dei due percorsi?

La risposta deve rimarcare la necessità che i passi siano uguali (cioè della stessa lunghezza).

2^ FASE: CAMPIONE GEOMETRICO

Un campione geometrico deve avere le seguenti proprietà:
- *deve essere omogeneo con l'entità da misurare* (per misurare una linea occorre una linea; per misurare una superficie occorre una superficie; ...);
- *deve essere riproducibile in un numero indeterminato di copie*;
- *deve essere adeguato, cioè non sproporzionato, all'entità da misurare* (non si può usare il Km per misurare la lunghezza dell'aula; in ogni caso il campione deve essere minore dell'entità da misurare).

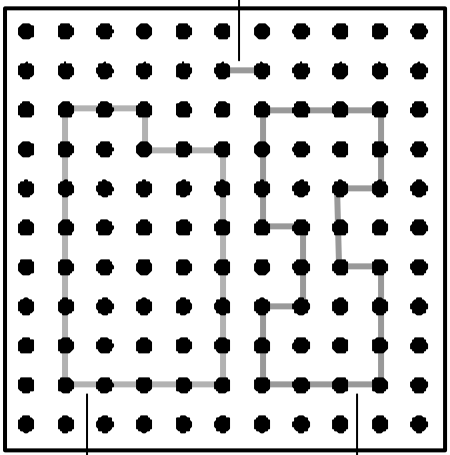
Nella prassi didattica, il primo campione che ha tutte le caratteristiche indicate ed è in armonia con le abitudini del bambino è la fettuccia riproducente il passo di un bambino scelto per il campione.
Se il bambino scelto è Giorgio, **la fettuccia sarà il campione "passo di Giorgio"**. Una volta costruito il campione, se ne riproducono altri a seconda delle necessità.
Con il campione "passo di Giorgio", i bambini eseguiranno misurazioni e confronteranno i risultati. Se un'entità, ad esempio la lunghezza del cortile di Aldo, misura 72 "passi di Giorgio", mentre un'altra, ad esempio la lunghezza del cortile della scuola, misura 63 "passi di Giorgio", allora si può affermare che il cortile di Aldo è più lungo del cortile della scuola.

E' opportuno che i bambini si esercitino nelle misurazioni utilizzando il campione e confrontino i risultati.
Nel campo di calcio ogni bambino deve misurare una parte diversa:
- la lunghezza;
- la larghezza;
- la larghezza della porta;
- l'altezza della porta;
- la distanza del disco di rigore dalla porta;
- la larghezza dell'area di rigore;
- la profondità dell'area di rigore.

Alla fine, le misure vengono riportate in una tabella e serviranno per costruire il disegno del campo su di un foglio quadrettato, dove il lato di un quadretto corrisponde a un passo.
Analogo esercizio si può fare per altri ambienti tipo l'aula, il campo di pallavolo, la palestra, ecc.

I seguenti esercizi consentono di raggiungere l'obiettivo del campione grafico passando attraverso la facilitazione di un piano prestrutturato (la quadrettatura per il foglio, i pioli per il geopiano).

elastico campione

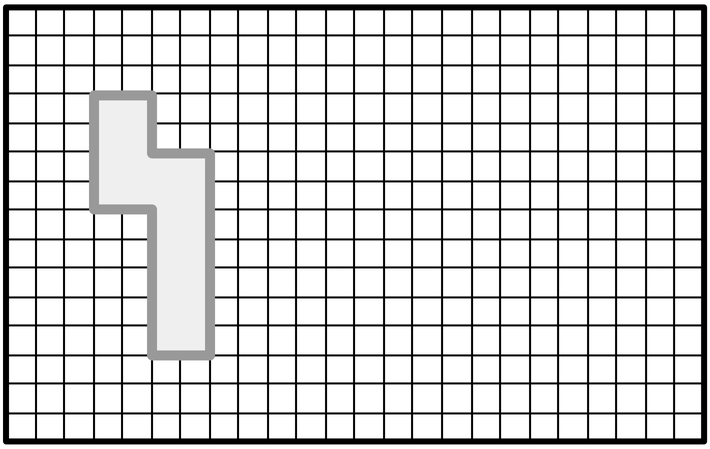


elastici rossi elastici blu

fig. 126

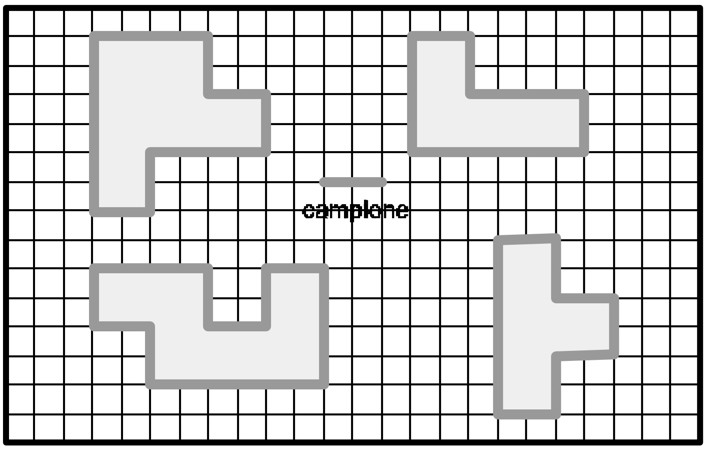
Sul geopiano il campione è la distanza tra due pioli vertico-orizzontali e viene evidenziato tendendo un elastico tra i due pioli. Sono possibili domande del tipo: "è più lungo il perimetro della figura rossa o quello della figura blu? Prova a misurarli con il campione assegnato".

Sul foglio quadrettato si possono proporre esercizi come i seguenti:



Disegna un nuovo poligono avente lo stesso preimetro di quello già tracciato.

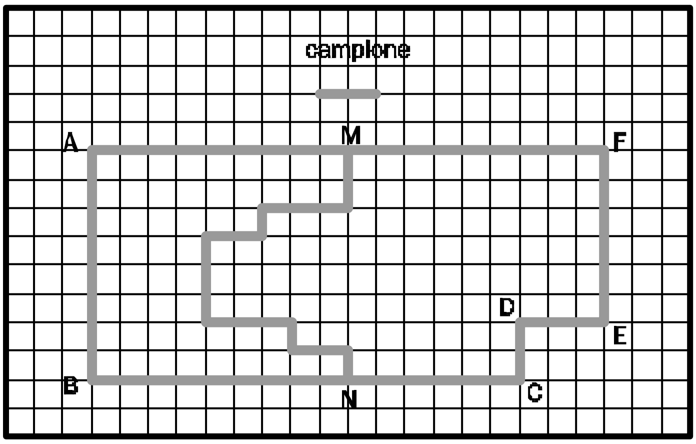
fig. 127



Con il campione assegnato misura il perimetro di ogni poligono e scrivi il risultato all'interno del poligono stesso.

Colora di rosso il poligono che ha il perimetro maggiore e di giallo quello col perimetro minore.

fig. 128



Trova il perimetro dell'esagono concavo ABCDEF:

campioni:_____________

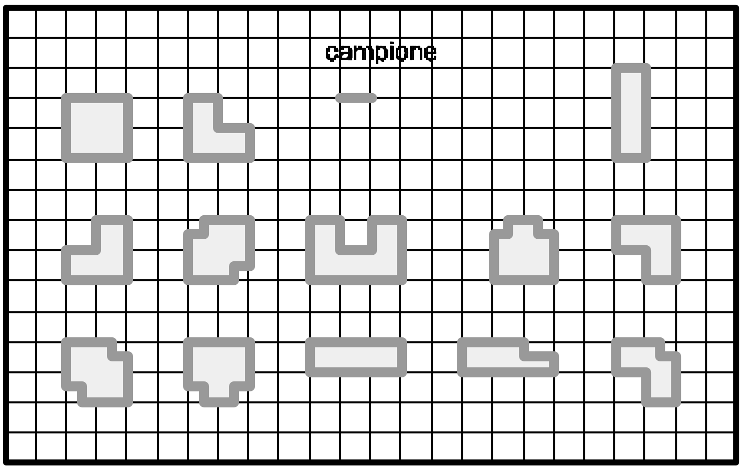
Quanto misura il lato più lungo?

campioni:_____________

L'esagono è diviso dalla linea MN in due poligoni. I perimetri dei due poligoni sono uguali o diversi?

____

fig. 129



Tra i campioni disegnati ce n'è uno che ha il perimetro diverso da tutti gli altri. Coloralo.

fig. 130

Dopo questi esercizi si procede alla misurazione di linee o tracciati senza il supporto della quadrettatura.

Altri esercizi possono essere proposti a livello corporeo:

campione fettuccia "passo di Giorgio"

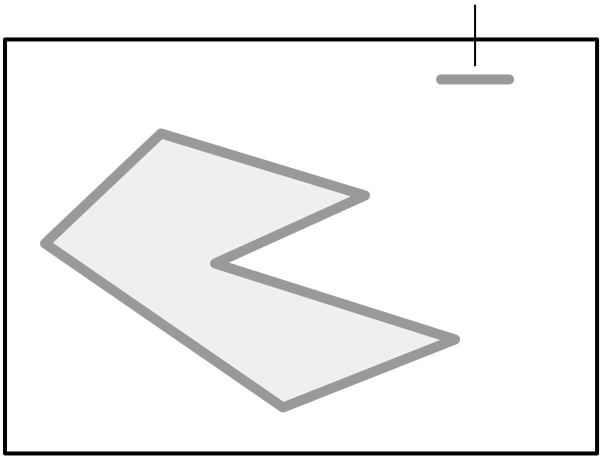


fig. 131

Sul pavimento si costruisce un poligono con corde o con nastro adesivo colorato. Il bambino, utilizzando la fettuccia campione, deve misurare il perimetro del poligono.
(Normalmente, i lati non contengono il campione un numero intero di volte, quindi, sul vertice del poligono, il campione viene piegato per proseguire sul lato successivo).

E' poco probabile che il perimetro risulti un numero intero di campioni e quindi il risultato sarà, ad esempio: 18 passi e un pezzo.
Questo esercizio si differenzia dai precedenti a causa del mancato aiuto della quadrettatura. E' necessario quindi ripresentare nuovi esercizi sul piano grafico.
Su un foglio bianco si disegnano un poligono e un segmento unità di misura. Il bambino deve misurare il perimetro del poligono con l'unità di misura assegnata.

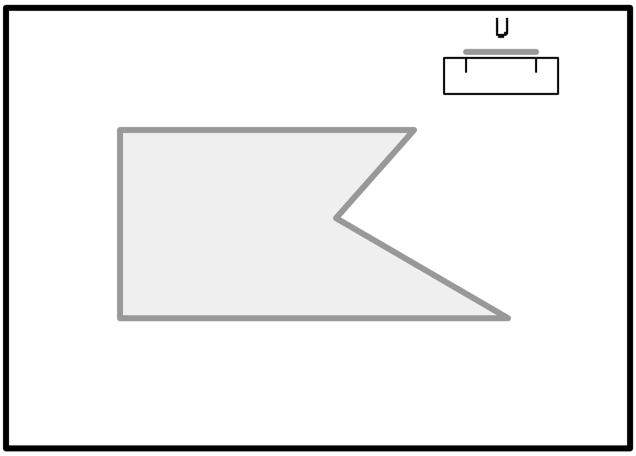


fig. 132

Per procedere alla misurazione, occorre prelevare l'unità di misura e trasformarla in campione. Per fare ciò si può, ad esempio, trasferire l'unità di misura su un cartoncino.
Il campione così ottenuto viene riportato sulla poligonale tracciando dei segni che permettano alla fine di rilevare quante volte il campione è stato riportato.

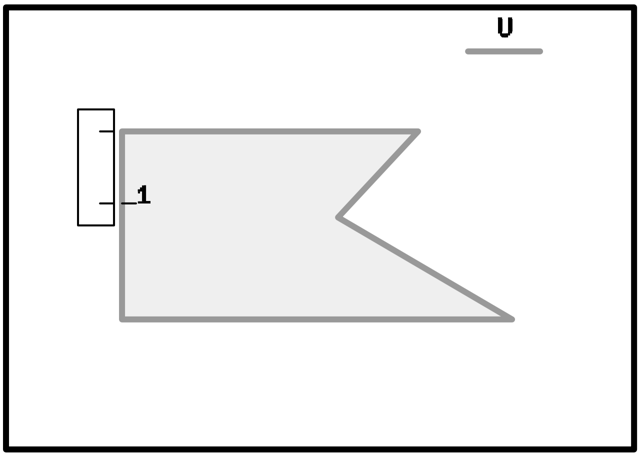


fig. 133

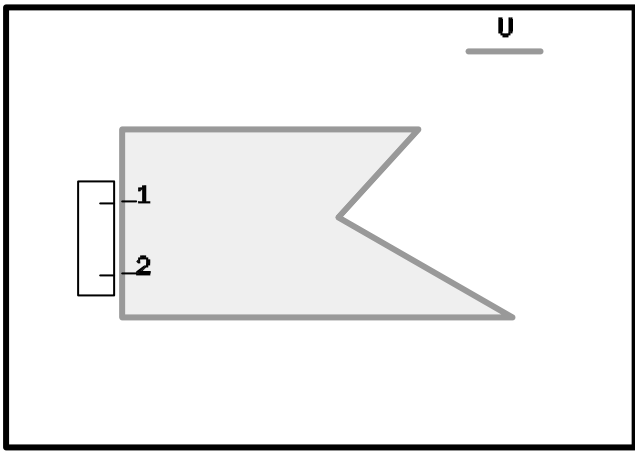


fig. 134

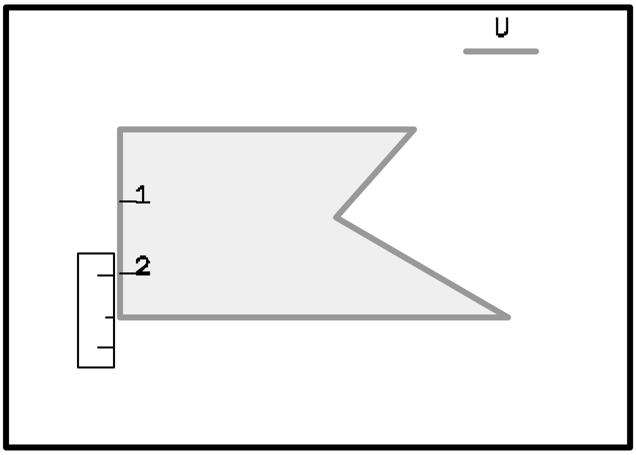


fig. 135

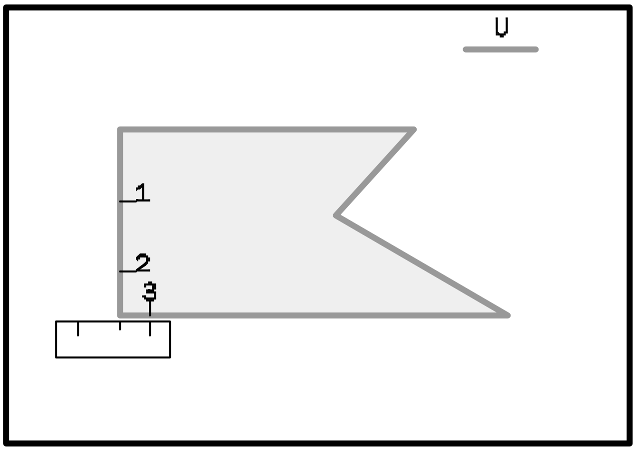


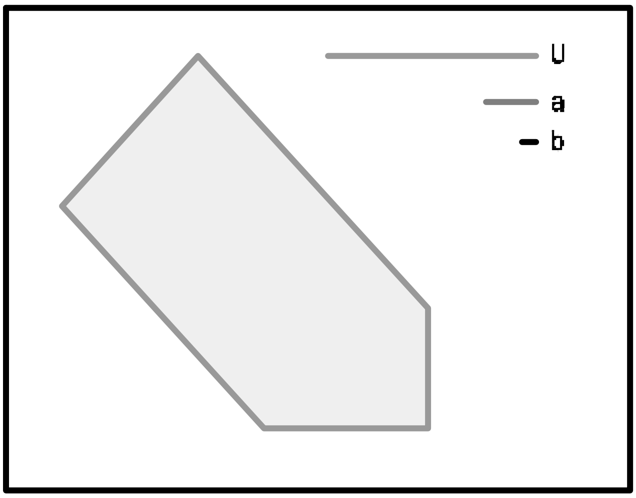
fig. 136

Come già a livello corporeo, anche a livello grafico, difficilmente il campione sarà contenuto un numero intero di volte e quindi la risposta potrà essere del tipo: il perimetro è lungo 12 unità di misura e un pezzo.

3^ FASE: PLURICAMPIONI

Sorge così la necessità di ricorrere all'uso di più campioni creandone altri ovviamente più piccoli dell'unità di misura.
A livello corporeo, oltre al campione-passo, i bambini costruiscono, ad esempio, i campioni "piede", "pollice" e misurano il perimetro del piano del banco, l'altezza della porta, la larghezza della finestra, ecc. riportando il campione più grande (fettuccia-passo) finché è possibile. Dopo di che riportano la fettuccia-piede e successivamente, se necessario, passano alla fettuccia-pollice.
In tal modo, ad esempio, il perimetro del ripiano della cattedra sarà espresso in passi, piedi e pollici.

Esempio di scheda a livello grafico:



Usando i campioni assegnati, trova la lunghezza del perimetro del poligono:

U	**a**	**b**
________	________	________

fig. 137

Il risultato del perimetro viene espresso non più con un solo numero ma con tanti numeri quanti sono i campioni utilizzati.

4^ FASE: PLURICAMPIONI IN RAPPORTO

Quando la serie di campioni utilizzati è stata formata badando solo al fatto che i sottocampioni siano semplicemente più piccoli:

fettuccia-pollice < fettuccia-piede < fettuccia-passo,

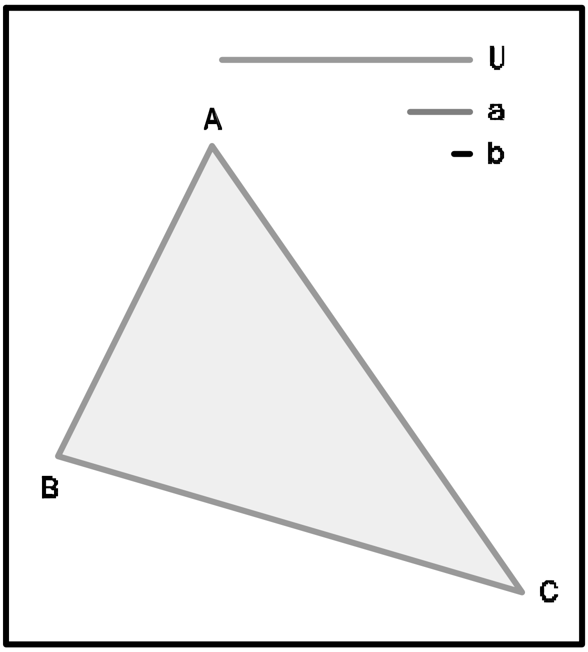
possono verificarsi misurazioni non confrontabili.

Ad esempio:
- Trova con una sola misurazione il perimetro dell'au-la usando le fettucce passo, piede, pollice.
- Misura le lunghezze di ogni lato dell'aula e calcola il perimetro sommando le misure ottenute.
- Il risultato ottenuto è il medesimo?
- Tra i due risultati ce n'é uno giusto e uno sbagliato?

Per rispondere a quest'ultima domanda, il bambino deve confrontare i due risultati, solo che, per poter effettuare il confronto, i sottocampioni devono essere in rapporto; quindi:

fettuccia-piede < fettuccia-passo

non basta più, occorre sapere quante fettucce piede necessitano per fare una fettuccia passo. Lo stesso discorso vale per le fettucce pollice e piede.
Difficilmente la fettuccia piede sarà contenuta un numero intero di volte nella fettuccia passo, pertanto occorre modificare opportunamente i sottocampioni. Esempio grafico:



Misura il perimetro:

	U	a	b
2p =	_________	_________	_________

Misura le lunghezze di ogni lato:

	U	a	b
AB =	_________	_________	_________
BC =	_________	_________	_________
CA =	_________	_________	_________
2p =	_________	_________	_________

Trova il perimetro facendo la somma delle lunghezze di ogni lato.

OSSERVAZIONI:
I perimetri ottenuti nei due modi diversi hanno dato lo stesso risultato?_____________________

E' possibile confrontare esattamente i due risultati ottenuti ? ______________

fig. 138

La scheda proposta, una volta completata, può dare i seguenti risultati:

	U	a	b
AB =	1	1	2
BC =	2	0	2
CA =	2	1	3
2p =	5	2	7

Con la misura diretta del perimetro risulta:

	U	a	b
2p =	6	0	2

Non potendo dire quanti "b" occorrono per fare un "a" e quanti "a" per fare "u", non è possibile effettuare cambi e quindi non è possibile confrontare i risultati.

Come già detto, *per ottenere la confrontabilità, occorre che i campioni siano, oltre che in relazione "maggiore-minore", anche in rapporto tra di loro.*

Il bambino, sui campioni "piede" e "pollice" opera delle modifiche ritagliando il campione "piede" fino a quando risulta contenuto un numero intero di volte nel campione "passo". Analogamente procede con il campione "pollice" rispetto al campione "piede".

I campioni così adottati mantengono ugualmente il loro nome e rendono possibili i confronti attraverso i rapporti di equivalenza, ad esempio:

3 piedi = 1 passo
11 pollici = 1 piede

ESERCIZIO:

Sul pavimento si dispongono tre corde in modo da delimitare un triangolo.
Con le fettucce campione si misura prima il perimetro e si scrive alla lavagna il risultato. Successivamente si misura ogni lato:

	passi	piedi	pollici
1° lato =	2	1	4
2° lato =	3	2	7
3° lato =	4	0	6
2p =	9	3	17

I due perimetri, pur dando luogo a registrazioni diverse, sono confrontabili effettuando i cambi di equivalenza:

		passi	piedi	pollici
2p	=	9	3	**17**
cambio			*1*	*6*
2p	=	9	**4**	6
cambio		*1*	*1*	
2p	=	10	1	6

Terminati i cambi, si vede che i risultati coincidono.
Ci si trova in un sistema metrico che è tipico del mondo anglosassone.

5^ FASE: PLURICAMPIONI IN RAPPORTO COSTANTE

Il rapporto non costante tra i campioni, usato nella fase precedente, permette di effettuare cambi ma non rientra in una concezione numerica di tipo multibase, dove le valenze, all'interno di ogni base, sono in rapporto costante tra di loro.
Con i campioni in rapporto non costante, la lunghezza di una linea può essere espressa solo citando le quantità riferite ad ogni campione. Nell'esempio precedente, il perimetro risulta: 10 passi, 1 piede e 6 pollici.

Non è possibile esprimere questa lunghezza citando un solo campione.

La scrittura metrica, per essere immediatamente comprensibile, deve rispecchiare la stessa struttura aritmetica, pertanto i campioni, come le valenze, devono essere in rapporto costante tra di loro.
Ad esempio, se i campioni A , B , C sono in rapporto:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = 10$$

la metrica viene chiamata **DECIMALE** perché i campioni hanno le valenze della base dieci, perciò, se B è l'unità, allora A è la DECINA e C è il DECIMO; se C è l'unità, allora B è la DECINA e A è il CENTINAIO. Se con tali campioni il perimetro di un triangolo risulta:

8A, 3B, 6C

il tutto può essere scritto riferendosi a un solo campione:

836 C oppure
83,6 B oppure
8,36 A

Con i bambini è preferibile partire con sistemi metrici non decimali, anche perché relativamente alle lunghezze, se una fettuccia viene ritenuta una unità, il bambino, piegandola a metà e poi ancora a metà e così via, ottiene altri campioni che rientrano in una metrica BINARIA.

In tal caso, i sottocampioni assumono nomi che si riferiscono al campione unità. Se l'unità è la fettuccia passo, i sottocampioni saranno:
- la fettuccia mezzo passo;
- la fettuccia un quarto di passo;
- ecc.

Se si hanno esigenze di campioni più grandi dell'unità, si creeranno i campioni:
- la fettuccia doppio passo;
- la fettuccia quadruplo passo;
- ecc.

Si fanno costruire ai bambini le fettucce-campione, derivate dal passo nel sistema duale:

quadruplo passo (P_4)
doppio passo (P_2)
passo (**P**)
mezzo passo ($P_{1/2}$)
quarto di passo ($P_{1/4}$)
ottavo di passo ($P_{1/8}$)

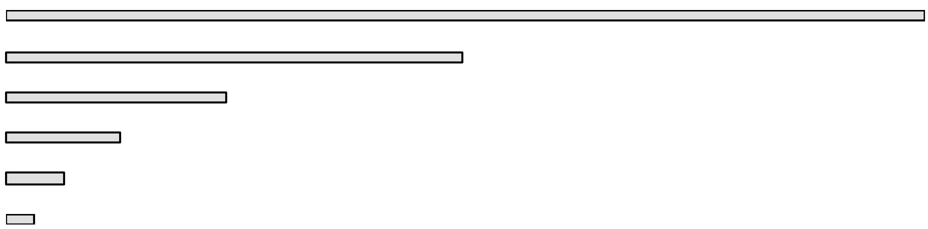


fig. 139

Con questi campioni si misurano, ad esempio, la lunghezza del corridoio, il perimetro del piano della cattedra, la larghezza del cortile, l'altezza della porta, ... e si esprimono le misure per esteso, cioè elencando tutti i campioni utilizzati. Ad esempio: il perimetro della cattedra può risultare:
1 quadruplo passo, 1 doppio passo, 0 passi, 1 mezzo passo, 0 quarti di passo e 1 ottavo di passo.

E' possibile approfittare dei multipli e dei sottomultipli del campione riferimento per introdurre il simbolo delle unità frazionarie:

P_4	P_2	**P**	$P_{1/2}$	$P_{1/4}$	$P_{1/8}$
1	1	0	1	0	1

La scrittura binaria, fatta con il solo campione passo, risulta:

$P\,[\,1\,1\,0\,,\,1\,0\,1\,]_{\text{base due}}$

dove la virgola separa l'unità dai suoi sottomultipli.
Nel caso della seguente misura:

P_4	P_2	**P**	$P_{1/2}$	$P_{1/4}$	$P_{1/8}$
5	1	1	0	0	1

significa che il campione maggiore usato P_4 non è il più idoneo, perché 2 volte P_4 significa P_8 e 4 volte P_4 significa 2 volte P_8 cioè P_{16} . Allora la scrittura diventa:

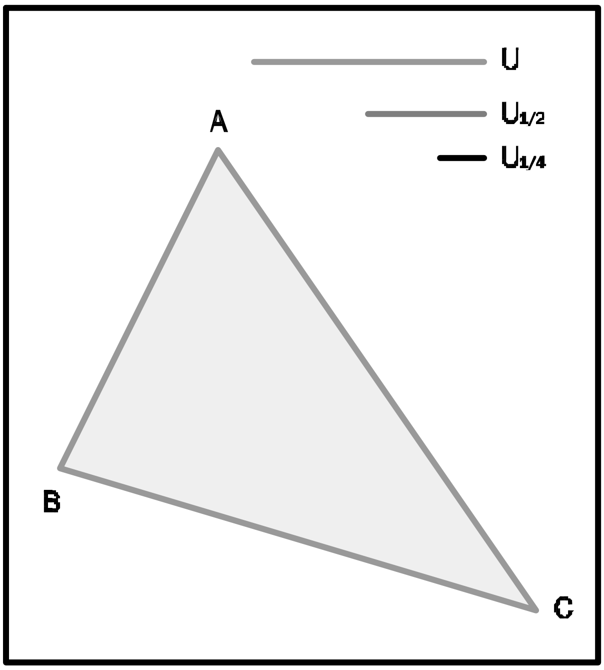
campioni ricavati	P_{16}	P_8						
campioni usati			P_4	P_2	**P**	$P_{1/2}$	$P_{1/4}$	$P_{1/8}$
partenza			5	1	1	0	0	1
1^ trasformazione		2	1	1	1	0	0	1
trasformazione finale	1	0	1	1	1	0	0	1

Con riferimento a un solo campione, si avrà:

P_2 [1 0 1 1 , 1 0 0 1] $_{\text{base due}}$ oppure:

P [1 0 1 1 1 , 0 0 1] $_{\text{base due}}$

Le seguenti tre schede vengono suggerite per completare, come al solito, la proposta dei pluricampioni anche a livello grafico.
L'utilizzo dei piani con struttura quadrettata permette la misurazione senza la necessità di riprodurre i campioni su cartoncino.



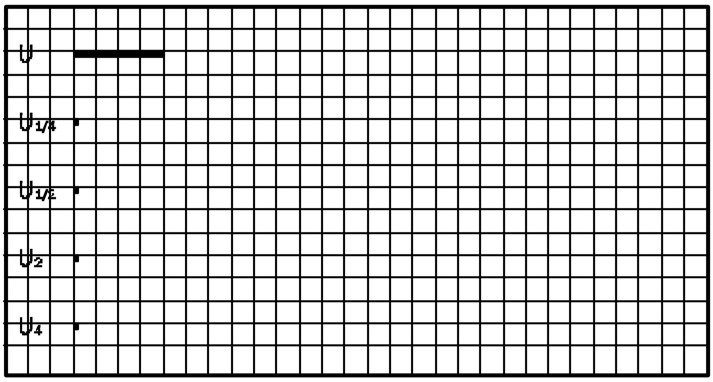
Utilizzando i campioni specificati nel disegno a fianco, misura prima le lunghezze di ogni lato e, successivamente, calcola il perimetro sommando le lunghezze di tutti i lati:

	U	$U_{1/2}$	$U_{1/4}$
AB =	_____	_____	_____
BC =	_____	______	_____
CD =	_____	_____	_____
2p =	_____	_____	_____

Procedendo con cambi ripetuti, esprimi il perimetro utilizzando anche i campioni multipli del campione unità:

	U_8	U_4	U_2	**U**	$U_{1/2}$	$U_{1/4}$
2p trovato						
cambio						
cambio						
cambio						

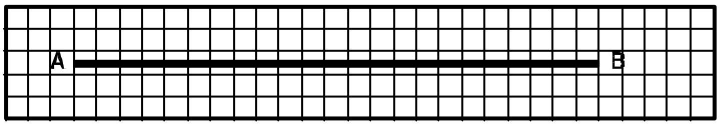
fig. 140



Nel piano quadrettato, disegnato a fianco, è stata tracciata l'unità.

Partendo dai punti indicati, disegna i campioni specificati a fianco.

Nel piano sottostante è stato disegnato un segmento AB. Utilizzando i campioni disegnati prima, completa la tabella posta alla fine della scheda:

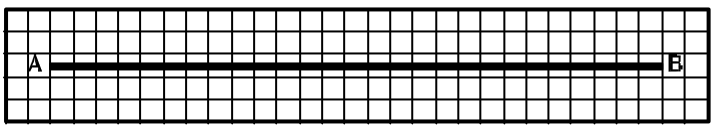


Campioni	U_4	U_2	**U**	$U_{1/2}$	$U_{1/4}$
lunghezza di AB usando solo $U_{1/4}$					23
lunghezza di AB usando solo $U_{1/2}$					
lunghezza di AB usando solo **U**					
lunghezza di AB usando solo U_2		2 e ...			
lunghezza di AB usando solo U_4					
lunghezza di AB usando tutti i campioni					

fig. 141

La base due, all'interno di un sistema metrico, è ancora oggi usata perché facilita la comprensione delle grandezze in gioco.
Ad esempio: riguardo alle distanze, se si ha presente la distanza tra due paesi, è facile pensare alla metà e al doppio, mentre è problematico concepire il decimo e il decuplo di quella distanza. Analogamente, per il tempo, si parla di mezza giornata e non di decimo di giornata. Per le capacità dei contenitori, è più facile pensare al mezzo litro che al decimo di litro.

Usando i campioni creati nella scheda precedente, misura la lunghezza del segmento AB disegnato nel piano sottostante. Completa poi la tabella riportata sotto, scrivendo in parole la lunghezza del segmento AB, utilizzando solo i campioni concessi:



U_4	U_2	**U**	$U_{1/2}$	$U_{1/4}$
uno	uno	zero	uno	uno
	tre	zero	uno	uno

fig. 142

6^ FASE: PLURICAMPIONI IN RAPPORTO DECIMALE

La base dieci è importante per diversi motivi:
- la maggior parte delle metriche è in base dieci;
- la scrittura convenzionale del numero è in sintonia con la metrica in base dieci;
- la misura in base dieci richiede un minor numero di campioni rispetto alla base due.

E' opportuno quindi avviare il bambino alla metrica decimale. In tale metrica si usano praticamente solo tre campioni:

-	etto	deca	unità
-	deca	unità	deci
-	unità	deci	centi
-	chilo	etto	deca

Infatti, se si parte con il campione decametro, per misurare la lunghezza di un corridoio, lo si riporta fino a quando si passa al campione metro e poi al campione decimetro. Il campione centimetro perde di significato per due motivi:
- la differenza fra 3,453 cm e 3,454 cm è insignificante (1 cm su 3 dam non è apprezzabile);
- l'impiego della fettuccia decametro più o meno tesa determina di per sé errori superiori al cm.

Tuttavia si deve tener conto della curiosità culturale del bambino, che lo spinge a una misurazione più minuziosa, facendo ricorso anche a campioni poco significativi in ordine all'operazione effettuata.

I campioni decimali

E' opportuno partire da un campione unità di cui anche il centesimo sia apprezzabile dal bambino dal punto di vista metrico e percettivo. Se si dovesse prendere come campione unità la fettuccia passo, il decimo di passo sarebbe apprezzabile, mentre il centesimo di passo sarebbe eccessivamente piccolo.

Da questo campione unità si ricavano i sottocampioni deci e centi e il multiplo deca.

Il campione unità è ancora arbitrario e le misurazioni effettuate, pur essendo in rapporto decimale, non sono quelle convenzionali. *Nonostante ciò si può apprezzare già la semplicità di scrittura di queste misure*: se il campione unità è l'altezza di Giorgio, la misura della lunghezza del corridoio può risultare:

deca altezze U_{10}	altezze **U**	deci altezze $U_{1/10}$	centi altezze $U_{1/100}$	scrittura con un solo numero	
3	8	6	2	U_{10}	3,862
	38	6	2	**U**	38,62
		386	2	$U_{1/10}$	386,2
			3862	$U_{1/100}$	3862

La misura viene espressa con un solo numero in forma decimale, dove la virgola separa le cifre che esprimono la quantità del campione usato da quelle che esprimono la quantità dei sottocampioni.

Allora: **256,4 decialtezze** significa:
256 decialtezze e 4 centialtezze

Le espressioni 4,38 decaltezze e 438 decialtezze indicano misure diverse o uguali?
438 decialtezze significa (effettuando i cambi):

		decialtezze	significato
	altezze	438	438 decialtez.
decaltezze	43	8	43,8 altezze
4	3	8	4,38 decaltez.

Allora: 4,38 decaltezze e 438 decialtezze sono due modi diversi per esprimere la stessa misura. Sono scritture equivalenti.

7^ FASE: SISTEMA DECIMALE CONVENZIONALE

La necessità di comunicare le dimensioni lineari, non solo all'interno del proprio ambito, pone *l'obbligo di una convenzione universalmente accettata e il campione diventa il **metro***. Partendo da questo, si ottengono altri campioni multipli e sottomultipli.
All'atto pratico non tutti i multipli e i sottomultipli del campione metro sono realizzabili. Ad esempio il campione chilometro, anche se realizzabile, è di difficile utilizzo; il campione decimo di millimetro non è realizzabile, anche se ci sono strumenti atti a rilevare queste dimensioni.

A livello di dimensioni corporee, è bene utilizzare i campioni *dam, m, dm* e *cm*, mentre per la metrica relativa alla grafica è bene usare anche il millimetro *mm*.

All'inizio il bambino deve abituarsi a *stimare le grandezze campione* per poter, successivamente, *stimare le grandezze in generale*.
Il bambino deve arrivare a riprodurre il metro servendosi del proprio corpo e riconoscere negli oggetti dell'ambiente la dimensione metro.

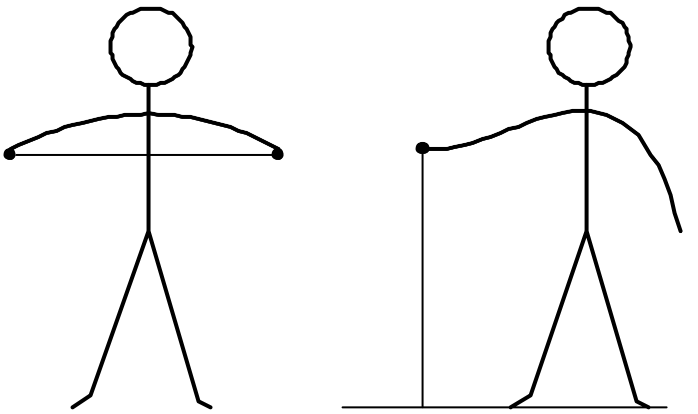
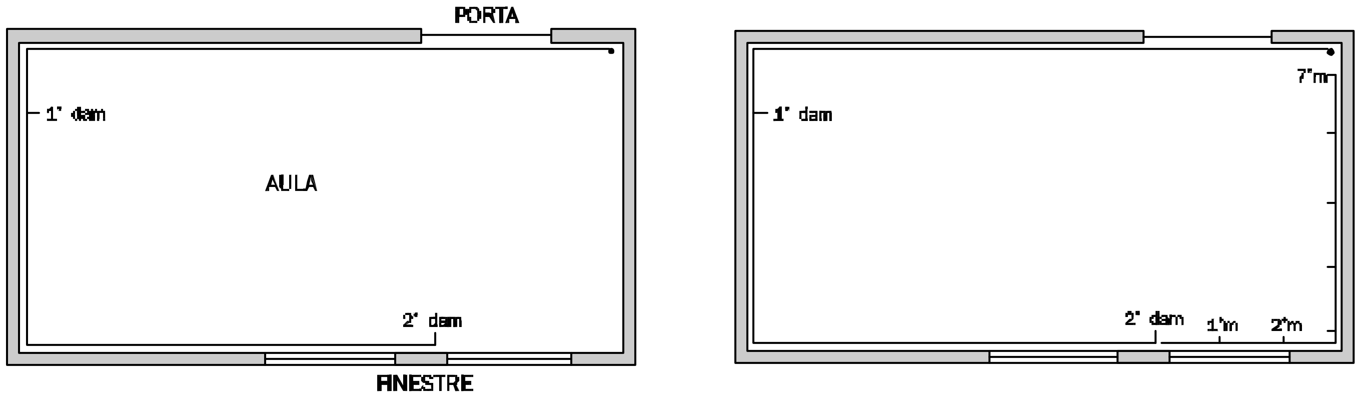


fig. 143

Ogni volta che il bambino riproduce la dimensione metro servendosi del proprio corpo, verifica quanto la stima varia rispetto al campione.
Analogamente per il *dam*, dove la stima riguarderà lunghezze di pareti, corridoi, cortili,.... Per il *dm*, l'esplorazione è fatta prima sul proprio corpo e poi su oggetti vari.

Quando il bambino è abbastanza sicuro nello stimare le lunghezze campioni, gli si chiede di stimare lunghezze che si presentano articolate in maniera complessa, quali: il 2p dell'aula, il percorso dall'aula alla segreteria, il 2p del banco,...
La verifica di tali stime porterà il bambino ad apprezzare meglio le dimensioni del campione e le lunghezze nelle situazioni concrete. Il risultato del 2p dell'aula si otterrà riportando il campione *dam*, ipotizzando di volta in volta se il campione *dam* è ancora contenuto nella parte che rimane da misurare. In tal modo si affina la stima del *dam*.



Ci sta ancora un *dam* ? PROVIAMO !

Ci sta ancora un *m* ? PROVIAMO !

fig. 144

Alla fine il 2p risulterà:

dam	m	dm	cm
2	7	4	2

e il bambino avrà fatto esperienza di stima di ogni campione usato.
Alla domanda: "Quanti m è lungo il 2p dell'aula?" la risposta data deve essere: 27 m e 4 dm e 2 cm, oppure 27,42 m. Stessa risposta data per i dm: 274 dm e 2 cm, cioè 274,2 dm.

Per lavorare a livello grafico è utile riportare su un cartoncino i campioni *dm, cm* e *mm*:

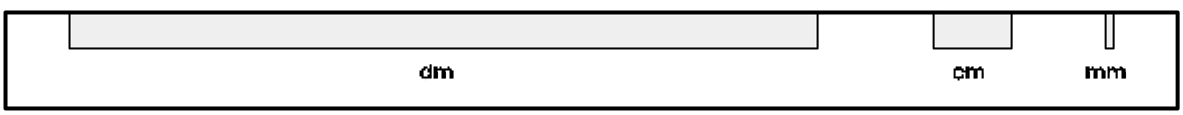
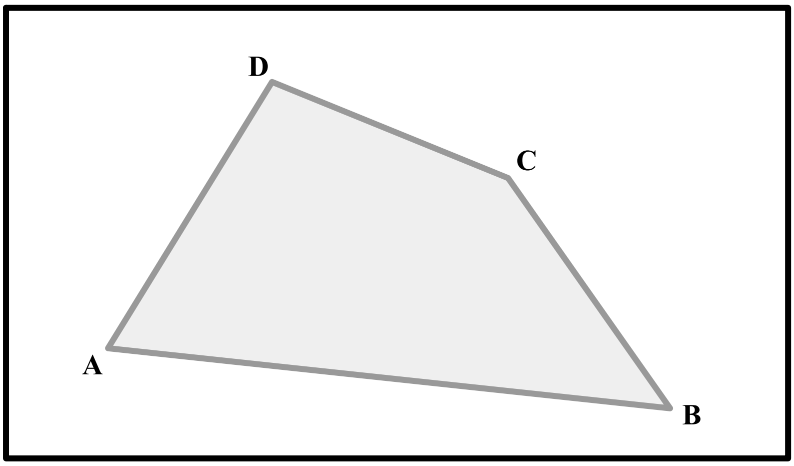


fig. 145

Nell'esempio seguente si propone su scheda non quadrettata una figura poligonale. Altri esercizi grafici si possono proporre con figure geometriche in cartoncino colorato da incollare sul quaderno, da identificare con lettere ai vertici e, successivamente, da misurare secondo le consegne.



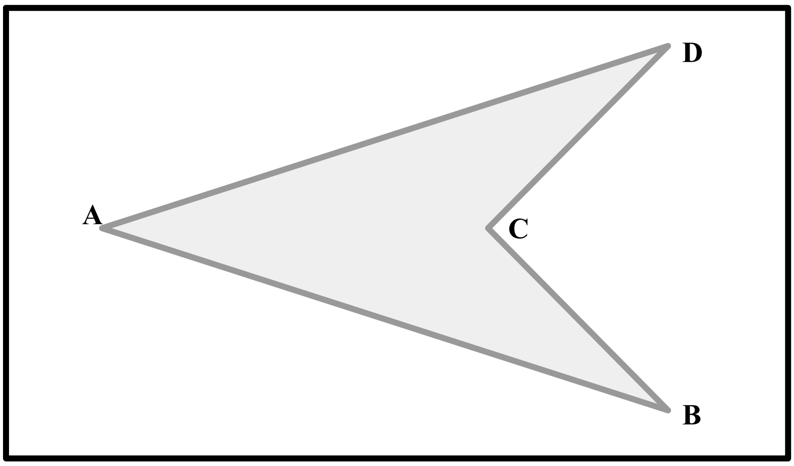
Completa la tabella sottostan-te in modo da calcolare il perimetro del quadrilatero ABCD dopo aver misurato la lunghezza di ogni lato.

Quale è il lato maggiore?____

Colora di rosso il lato minore.

Traccia le diagonali ed eviden-zia con il verde quella più lun-ga.

	dm	cm	mm
AB =			
BC =			
CD =			
DA =			
somma			
2p =			



Completa la tabella sottostan-te in modo da calcolare il perimetro del nuovo quadrilatero ABCD disegnato a fianco.

I lati sono a due a due uguali?

____

E' vero che la somma fra i lati AB e BC risulta la metà del perimetro?

____

	dm	cm	mm
AB =			
BC =			
CD =			
DA =			
somma			
2p =			

fig. 146

10.
UGUAGLIANZE LINEARI IN ALCUNI POLIGONI

I poligoni più importanti, come il rettangolo, il quadrato e il triangolo, hanno molte proprietà relative alle uguaglianze dei lati della frontiera e delle diagonali, quando ci sono.

La conoscenza di tali proprietà fa maturare ulteriormente la concezione di queste fondamentali figure, inoltre permetterà di risolvere meglio i problemi legati alla reversibilità del pensiero.

RETTANGOLO

Il bambino riceve un cartoncino di forma rettangolare e verifica, accostandoli, che i lati opposti hanno la stessa lunghezza.

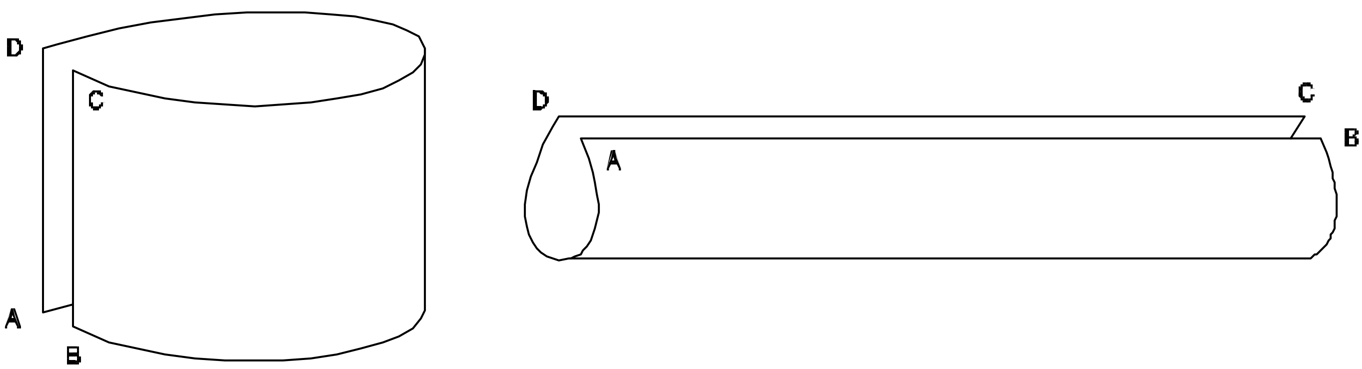
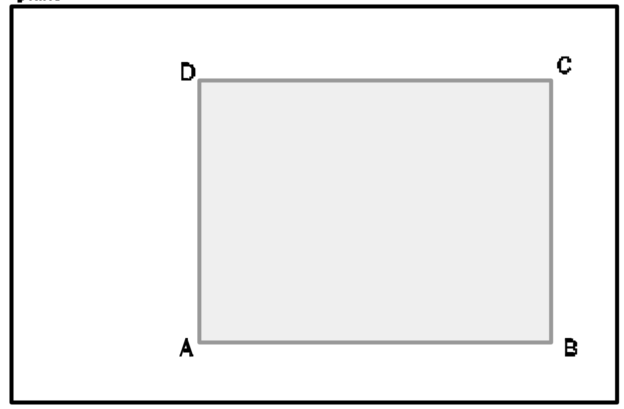


fig. 147

Schede come le seguenti rimarcano ulteriormente tale proprietà dei rettangoli:



La regione ABCD che tipo di figura è ?

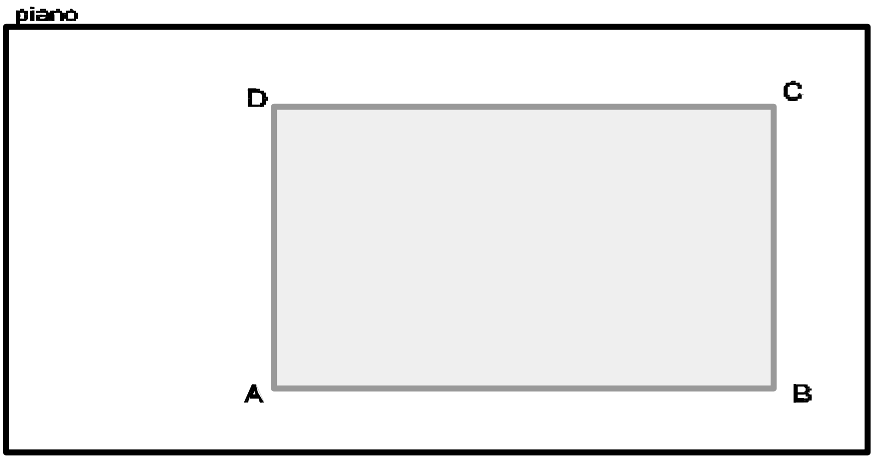
____

Come si chiamano i segmenti AB e CD quando vengono riferiti alla figura ABCD ?

AB ______________

CD ______________

fig. 148



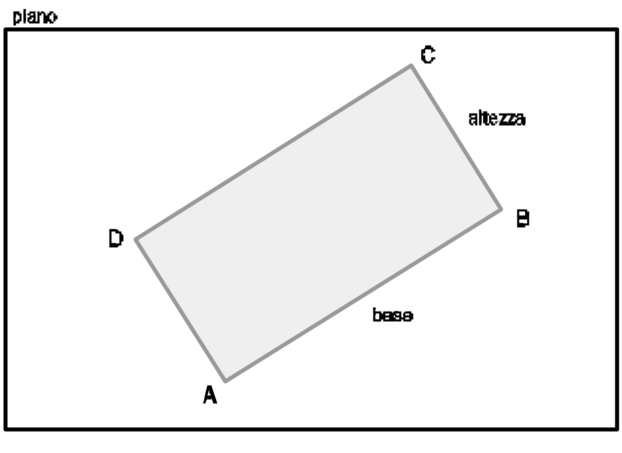
Completa la seguente tabella dopo aver effettuato le misurazioni del rettangolo ABCD:

	dm	cm	mm
Lunghezza della base AB			
lunghezza dell'altezza BC			

Completa la seguente tabella senza compiere alcun tipo di misurazione:

	dm	cm	mm
Lunghezza della base AB			
lunghezza dell'altezza BC			

fig. 149



Il quadrilatero ABCD disegnato a fianco è un rettangolo, anche se è posizionato in obliquità.

Colora di blu la base AB e l'altezza BC.

Completa la seguente tabella dopo aver fatto le opportune misurazioni:

	dm	cm	mm
Lunghezza della base AB			
lunghezza dell'altezza BC			
Base + altezza (AB + BC)			

La (base + altezza) :
- E' minore del perimetro del rettangolo ? ______________________________
- Quale parte è del perimetro del rettangolo ? ____________________________
- E' possibile chiamarla SEMIPERIMETRO del rettangolo ? _______________

fig. 150

La scheda appena presentata vuol portare il bambino all'uso del concetto di semiperimetro.
Attraverso il semiperimetro delle figure i calcoli sulle grandezze metriche vengono facilitati e, specialmente nei problemi che richiedono la reversibilità del pensiero, il semiperimetro permette di giungere ai risultati richiesti senza la necessità di ricordare le formule inverse.

I problemi, con soluzioni guidate prima e libere poi, aiutano il bambino ad approfondire il discorso sul semiperimetro del rettangolo.

PROBLEMA:
Incolla il cartoncino di forma rettangolare nel piano disegnato sotto, in modo che risulti un rettangolo, e calcola il suo perimetro misurando solo due lati.

piano

Base = cm __________________   Altezza = cm __________________

Perimetro (2p) = cm [(__________ + __________) x 2] =

= cm [__________ x 2] =

= cm __________

fig. 151

Se il problema fosse stato libero (non guidato), il bambino avrebbe dovuto congegnare la soluzione.
Uno dei metodi più efficaci e logicamente produttivi, anche se difficile, è il TOP-DOWN sviluppato attraverso l'uso dei diagrammi ad albero. Per ovviare alla difficoltà di tale metodo il bambino va educato all'uso dei diagrammi ad albero, sin dagli anni precedenti, come metodo per esprimere sinteticamente le soluzioni dei problemi affrontati.

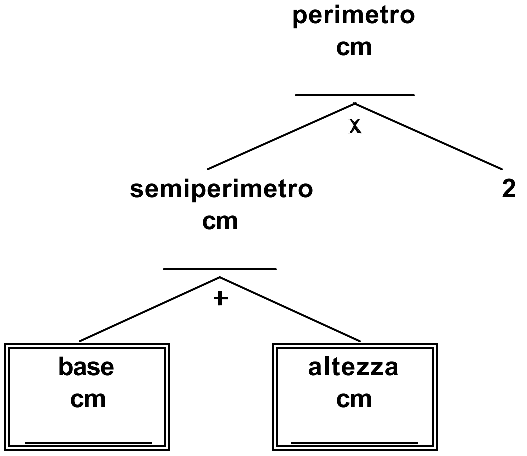


fig. 152

Il problema richiede di trovare il perimetro del rettangolo facendo solo due misure. Non è perciò possibile misurare tutti i 4 lati.
Il perimetro allora è pensato come due volte il semiperimetro.
Il semiperimetro è, nel rettangolo, la somma della misura della base con la misura dell'altezza.

Ora il problema è risolto sul piano logico, per risolverlo anche sul piano aritmetico è sufficiente ripercorrere e completare il diagramma ad albero dal basso verso l'alto.

PROBLEMA:
Un rettangolo ha il perimetro di 30 cm e la base di 9 cm. Calcola la lunghezza della sua altezza e poi disegnalo nel piano quadrettato.

DATI: 2p = cm __________ RICHIESTE altezza = cm ?
base = cm __________ disegno = ?

RISOLUZIONE: semiperimetro (p) = cm (__________ : 2) = cm __________
base + altezza = cm __________

altezza = cm (__________ - __________) =
= cm __________

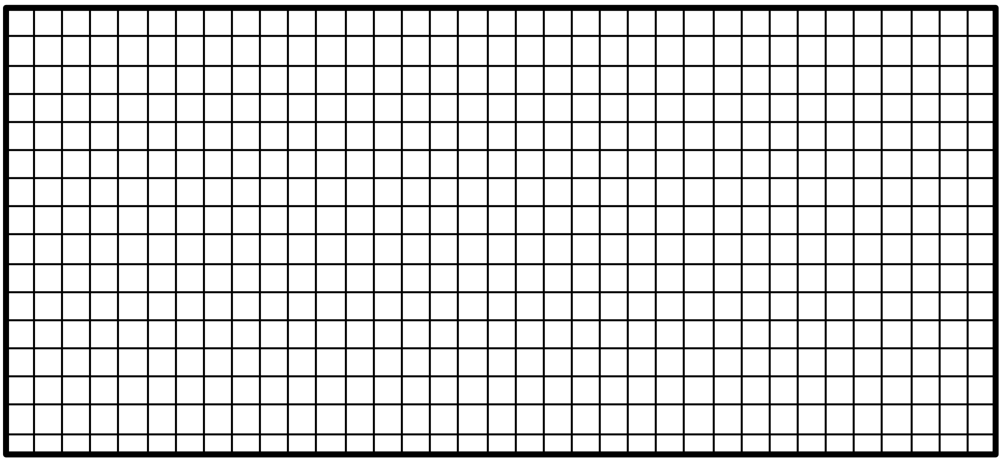


fig. 153

Il semiperimetro ha permesso di risolvere il problema senza ricorrere alle formule inverse. *Il semiperimetro è, per i calcoli geometrici, più importante del perimetro*. Per tale motivo il simbolo algebrico **"p"** è del semiperimetro, mentre il perimetro ha un simbolo derivato da questo: **"2p".**

La soluzione del problema col metodo TOP-DOWN è la seguente:

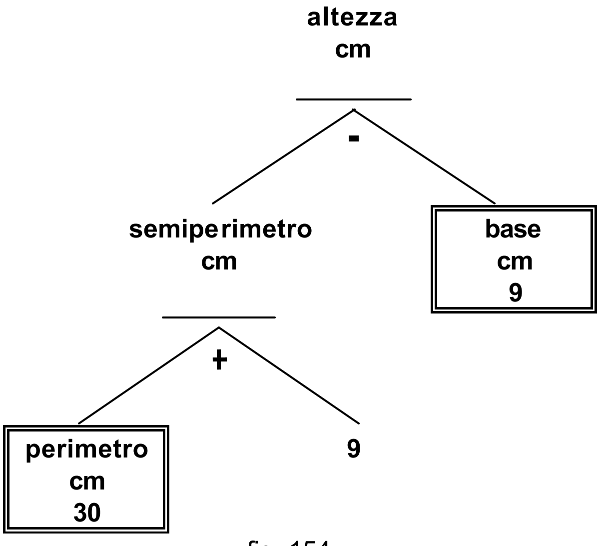
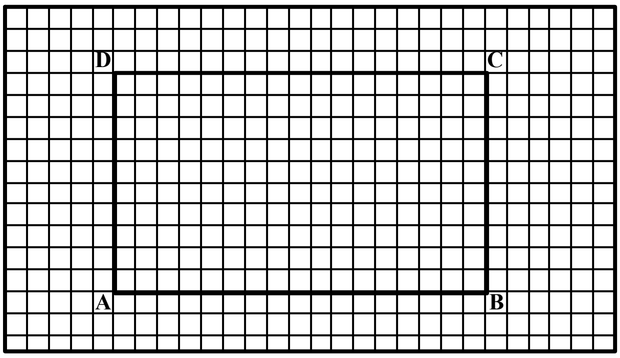


fig. 154

Il problema richiede di trovare l'altezza di un rettangolo di cui si conosce la base, oltre che il perimetro.
Il legame fra la base e l'altezza esiste attraverso il semiperimetro: l'altezza di un rettangolo è la differenza fra il semiperimetro e la base.
Il semiperimetro lo si può trovare dimezzando il perimetro.

Il problema è logicamente risolto, per risolverlo anche aritmeticamente si ripercorre il diagramma ad albero dal basso verso l'alto.

Altre proprietà del rettangolo riguardano le diagonali.



Traccia le diagonali AC e BD.

Chiama con E il punto dove le diagonali si incontrano (punto di intersezione).

Completa la tabella sottostante dopo aver fatto le opportune misurazioni:

	cm	mm
Lunghezza della diagonale AC		
Lunghezza della diagonale BD		
Lunghezza del segmento AE		
Lunghezza del segmento CE		
Lunghezza del segmento BE		
Lunghezza del segmento DE		

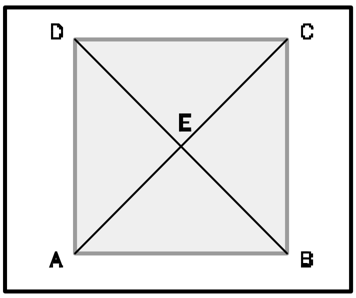
Le diagonali di un rettangolo:

- Hanno la stessa lunghezza ? _______
- Si incontrano in un punto che le divide a metà ? _________________

fig. 155

PROBLEMA:
Disegna sul tuo quaderno un rettangolo sapendo che la sua base è lunga 15 cm e che la sua diagonale è lunga 22 cm.
PROBLEMA:
Disegna sul tuo quaderno un rettangolo avente sia l'altezza sia la semidiagonale di 10 cm.
PROBLEMA:
Il giardino di Paolo ha una forma rettangolare con i lati lunghi rispettivamente 12 m e 9 m. Disegnalo sul tuo quaderno in modo che ogni metro corrisponda ad un centimetro.
Quanti metri è lunga la diagonale del giardino ?
PROBLEMA:
Due rettangoli hanno la basi: il 1° di 6 cm, il 2° di 12 cm. Sapendo che entrambi hanno le diagonali di 15 cm, disegnali e specifica quale dei due ha il perimetro maggiore.

QUADRATI



Del quadrato ABCD misura le lunghezze di un lato e di una diagonale:

	cm	mm
AB =	________	________
BE =	________	________

Senza ulteriori misurazioni completa la tabella sottostante:

	dm	cm	mm
4 volte AB			
perimetro del quadrato			
4 volte BE			
somme delle diagonali del quadrato			

fig. 156

Come mostrato dalla scheda, proponendo per il quadrato esercizi analoghi a quelli proposti per il rettangolo, il bambino verificherà che i lati del quadrato sono tutti uguali tra di loro.

PROBLEMA:
Un quadrato ha il perimetro di 60 cm. Quanto è lungo il suo lato? Disegna il quadrato, traccia una sua diagonale e misurala. Quanto è lunga?

PROBLEMA:
Un giardino ha la forma quadrata con il semiperimetro di 24 m. Sapendo che è attraversato diagonalmente da un sentiero, quanto è lungo tale sentiero ?
Per rispondere disegna il giardino in modo che ad ogni metro corrisponda un centimetro.

PROBLEMA:
Un rettangolo ed un quadrato hanno lo stesso perimetro di 40 cm. Sapendo che la base del rettangolo è di 6 cm, disegna le due figure e misura le rispettive diagonali. E' più lunga la diagonale del rettangolo o quella del quadrato ?

PROBLEMA:
Da un foglio di forma rettangolare di lati 18 cm e 12 cm devi ritagliare il quadrato più grande. Quanto è il perimetro della parte rimanente? E' vero o falso che il perimetro della parte rimanente è la metà del perimetro del quadrato ritagliato?

TRIANGOLO

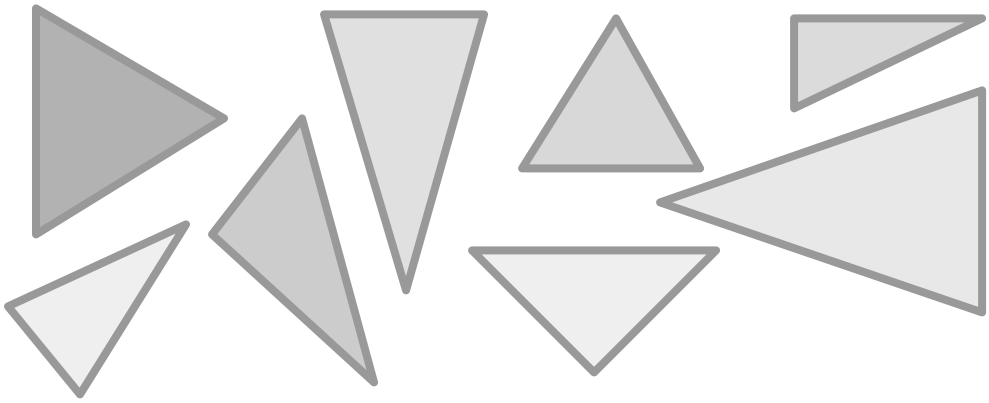


fig. 157

Si presenta al bambino un insieme di forme triangolari realizzate con carta colorata. Queste forme devono essere di dimensioni sufficientemente grandi in maniera da facilitare:
- la manipolazione delle stesse;
- la precisione dei confronti.

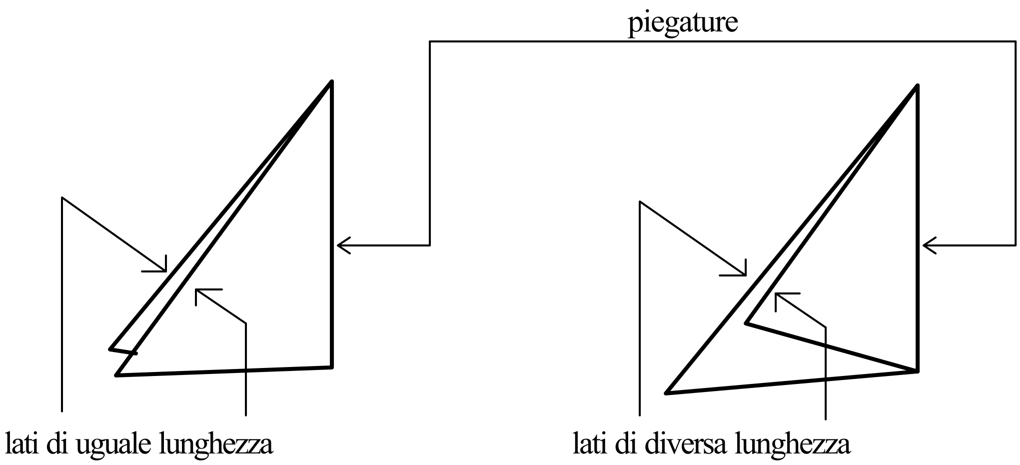


fig. 158

Si chiede di fare una classificazione mettendo a confronto i lati mediante opportune piegature di ogni figura.
Le piegature evidenzieranno triangoli aventi almeno due lati uguali e triangoli aventi tutti e tre i lati diversi. In questo modo si ottiene una prima classificazione.

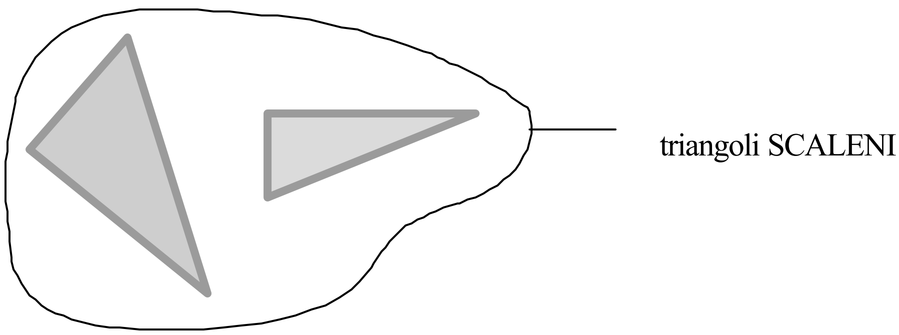


fig. 159

Il bambino incolla sul quaderno *i triangoli che hanno tutti i lati di lunghezza diversa: i triangoli scaleni*.

I rimanenti sono *triangoli isosceli: triangoli che hanno almeno due lati di uguale lunghezza*.

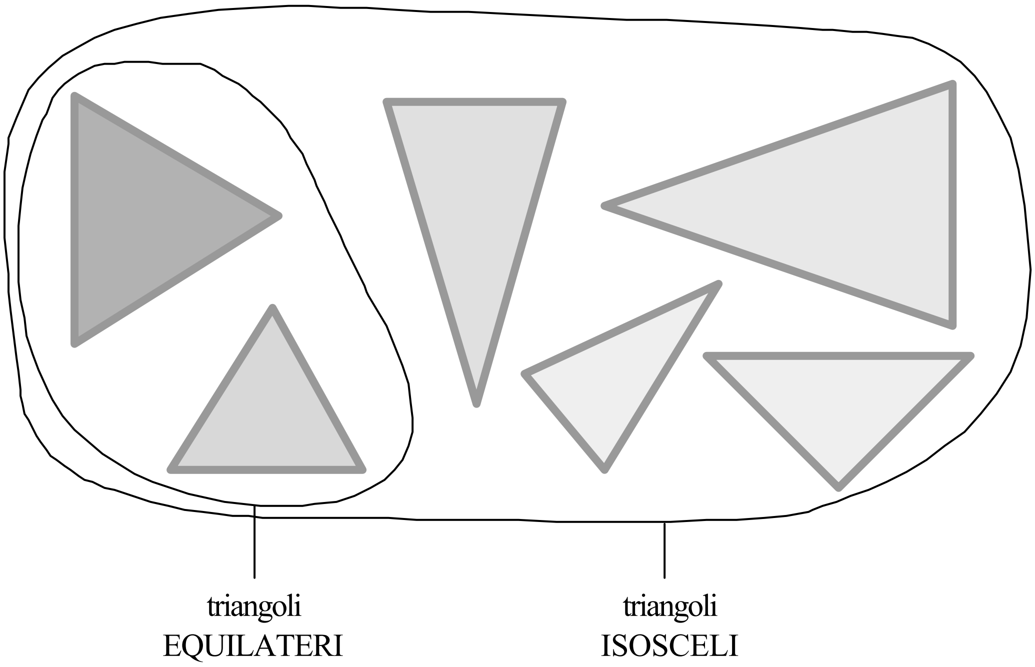


fig. 160

I triangoli isosceli vengono nuovamente esaminati e attraverso altre piegature i bambini scoprono che alcuni triangoli hanno tutti e tre i lati uguali. Si vuole in tal modo evidenziare che i triangoli equilateri sono dei particolari triangoli isosceli.
A questo punto i triangoli vengono incollati sul quaderno evidenziando il sottoinsieme dei *triangoli* chiamati *equilateri: triangoli che hanno tutti e tre i lati di uguale lunghezza.*

E' opportuno proporre schede e problemi che permettano al bambino di approfondire le conoscenze relative a questo nuovo tipo di classificazione.

Nella tabella sottostante sono date le lunghezze dei lati di alcuni trinagoli. Completala classificando i triangoli.

1° lato	2° lato	3° lato	TIPO DI TRIANGOLO
3 cm	5 cm	4 cm	
18 m	18 m	11 m	
7 m	4 m	7 m	isoscele
6 dm	6 dm	6 dm	isoscele ed equilatero
40 mm	40 mm	4 cm	
8 cm	8 cm	8 mm	
4 cm	3 cm	13 mm	

Nella tabella sottostante sono dati alcuni tipi di trinagoli. Completala con lunghezze opportune.

1° lato	2° lato	3° lato	TIPO DI TRIANGOLO
3 cm	5 cm	_____ cm	scaleno
18 m	_____ m	11 m	isoscele non equilatero
_____ m	4 m	7 m	isoscele
6 dm	6 dm	_____ cm	isoscele ed equilatero
40 mm	4,2 cm	_____ cm	scaleno
8 cm	72 mm	_____ mm	scaleno
4 cm	0,4 dm	_____ mm	isoscele ed equilatero

fig. 161

Come già detto, il bambino tende a non considerare il triangolo equilatero come un triangolo che è anche isoscele.
Occorre insistere affinché isoscele ed equilatero non siano termini dove uno esclude l'altro, pericolo questo che si presenta anche quando il bambino confronta il quadrato con il rettangolo: difficilmente vede il quadrato come un particolare rettangolo.

Misura i lati dei triangoli disegnati e completa la tabella:

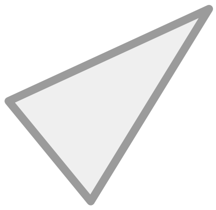
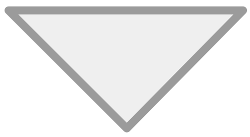
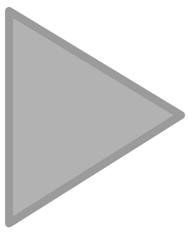
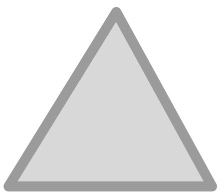
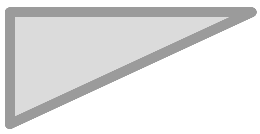
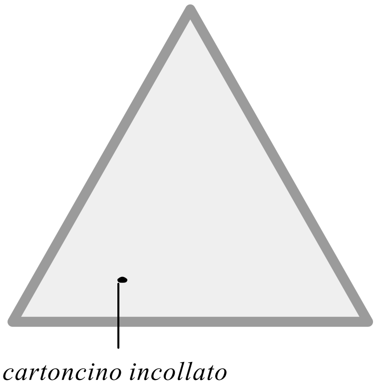
TRIANGOLI	MISURE DA EFFETTUARE	TIPO DI TRIANGOLO	VERO FALSO
	cm mm 1° lato ______ ______ 2° lato ______ ______ 3° lato ______ ______	ISOSCELE	VERO
	cm mm 1° lato ______ ______ 2° lato ______ ______ 3° lato ______ ______		
	cm mm 1° lato ______ ______ 2° lato ______ ______ 3° lato ______ ______		
	cm mm 1° lato ______ ______ 2° lato ______ ______ 3° lato ______ ______		
	cm mm 1° lato ______ ______ 2° lato ______ ______ 3° lato ______ ______		

fig. 162

Molti problemi guidati possono essere proposti al bambino dando cartoncini di forma triangolare da incollare sul quaderno o sulle schede.
Dato al bambino un cartoncino colorato avente la forma di un triangolo isoscele non equilatero, il bambino, mediante piegatura, deve trovare quali sono i due lati uguali, li evidenzia, incolla il triangolo e procede alla risolu-zione del problema:

PROBLEMA:
Del triangolo incollato calcola il perimetro misurando solo la base e un lato obliquo.



MISURAZIONE:

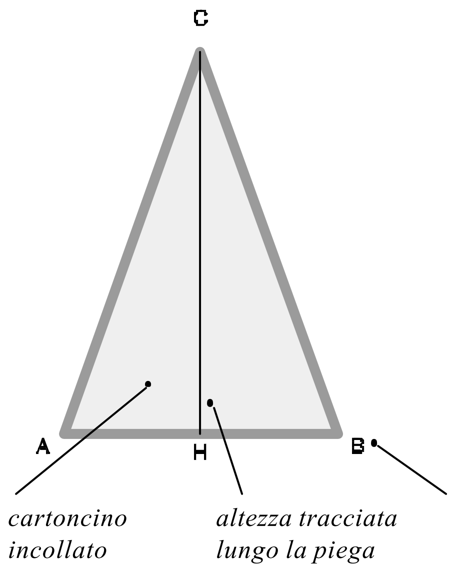
base	lato obliquo
cm __________	cm __________

RISOLUZIONE:

2p = cm [__________ + (__________ x 2)] =
= cm [__________ + __________] =
= cm __________

fig. 163

PROBLEMA:
Del triangolo isoscele non equilatero incollato, calcola il perimetro misurando solo un lato obliquo e metà base.



MISURAZIONE:

metà base	lato obliquo
cm __________	cm __________

RISOLUZIONE:

2p = cm [(__________ + __________) x 2] =
= cm [__________ x 2] =
= cm __________

fig. 164

Con i diagrammi ad albero le soluzioni dei due problemi sono:

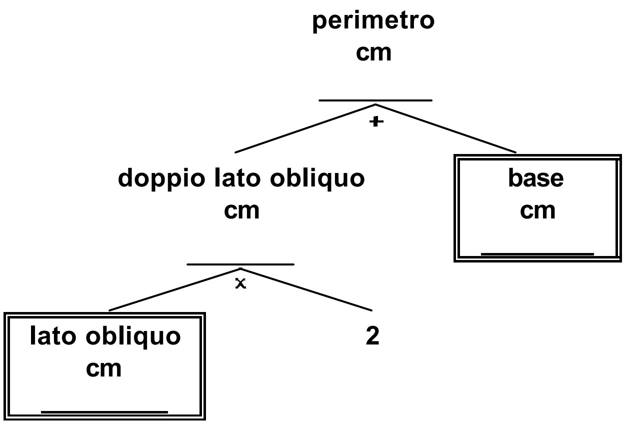


fig. 165

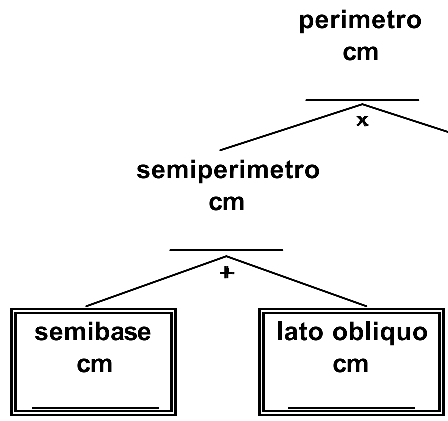
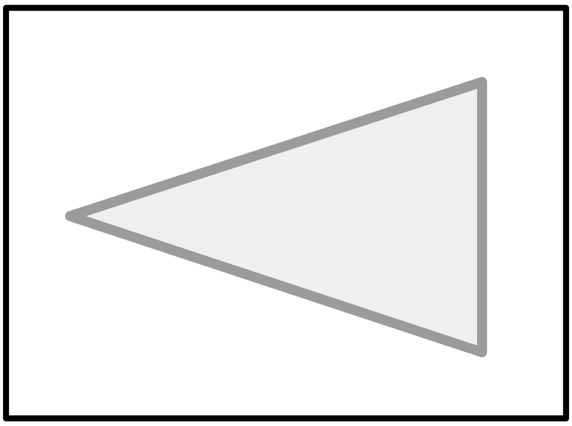


fig. 166



PROBLEMA:
In un triangolo isoscele non equilatero ABC i lati sono lunghi ciascuno 8 cm.
Sapendo che il perimetro è di 20 cm, trova la lunghezza del lato BC.

RISOLUZIONE:
1° Completa la figura scrivendo opportuna-mente il nome dei vertici del triangolo.
2° Completa il diagramma ad albero sottostante facendo i calcoli indicati:

lato BC
cm ________
-

perimetro cm 20

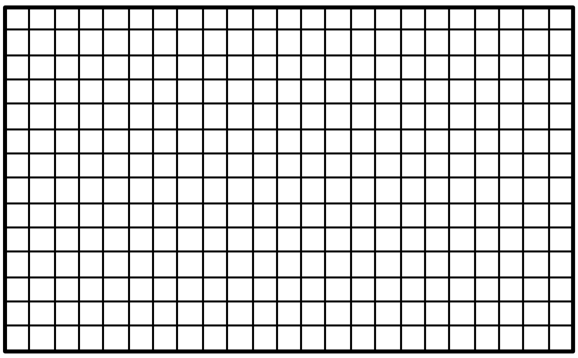
somma lati uguali
cm ________
x

lato AB cm 8

2

fig. 167

PROBLEMA:
Il perimetro di un triangolo equilatero è di 24 cm. Disegnalo.
PROBLEMA:
La terza parte del perimetro di un triangolo equilatero è di 7 cm. Quanto misura ciascuno dei suoi lati? Disegna il triangolo e calcola il suo perimetro.



PROBLEMA:
Un triangolo scaleno ha due lati lunghi rispettiva-mente 3 cm e 4 cm. Sapendo che il suo perimetro è di 12 cm, calcola la lunghezza del terzo lato e dise-gna il triangolo nel piano quadrettato posto a fianco.

RISOLUZIONE:

lato da trovare
cm ________
-

perimetro cm_______

somma lati noti
cm ________
+

1° lato noto cm_______

2° lato noto cm_______

fig. 168

11.
METRICA DELLE AREE

I PRIMI RICOPRIMENTI

Le superfici sono parti di un piano delimitato da linee.
Come tali hanno associate due metriche: una relativa alla linea delimitante (il perimetro della superficie), l'altra relativa alla quantità della parte di piano (*area* o *estensione della superficie*).

La metrica delle aree verrà trattata in questo capitolo utilizzando la metodologia dei campioni e, per quanto riguarda altri sviluppi non riferiti strettamente ai campioni, si rimanda ai capitoli successivi.

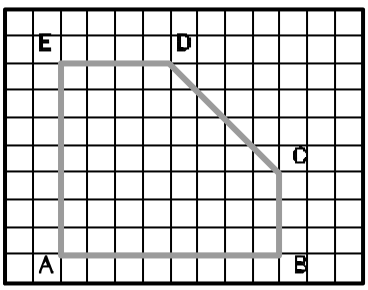
Inizialmente si propongono come campioni delle superfici arbitrarie, facilmente manipolabili e presenti in quantità di coppie sufficienti a completare il ricoprimento. Ad esempio:
- trova l'area del pavimento dell'aula utilizzando come campione di ricoprimento il foglio del giornale;
- trova l'area del piano della cattedra utilizzando come campione il foglio da ciclostile;
- trova l'area della pagina del quaderno utilizzando come campione il foglietto del bloc-notes piccolo.

Gli esempi citati propongono la forma rettangolare, come campione, perché è più facile da reperire ed agevola il lavoro di ricoprimento.
I bambini, alla luce dell'esperienza sulle misure lineari, spontaneamente ricorreranno all'uso dei sottocampioni; infatti, utilizzando fogli di giornale, difficilmente otterranno un ricoprimento completo del pavimento. Per ricoprire anche la parte mancante, il bambino dividerà il foglio di giornale a metà e, se necessario, farà anche la metà della metà, utilizzando così una metrica duale.

Se, ad esempio, per ricoprire il pavimento occorrono:
42 fogli, 7 mezzi foglio e 12 quarti di foglio
attraverso i cambi della base due si arriva a determinare che *l'area del pavimento è di 48 fogli e mezzo*.

foglio intero	mezzo foglio	1/4 f.
42	7	12
42	13	0
48	1	0

Anche attraverso le piccole superfici il bambino si deve esercitare al ricoprimento utilizzando sia i campioni sia i relativi sottocampioni.



Ritaglia, da un foglio, tanti quadrati di lato 1 cm.
Taglia a metà alcuni di essi in modo da ottenere due rettangoli uguali.
Taglia a metà lungo la diagonale altri quadrati in modo da ottenere due triangoli uguali.

Incolla i campioni e i sottocampioni ottenuti fino a ricoprire interamente il pentagono ABCDE.

CAMPIONE  ____________ MEZZO CAMP.  ____________ + MEZZO CAMP.  ____________

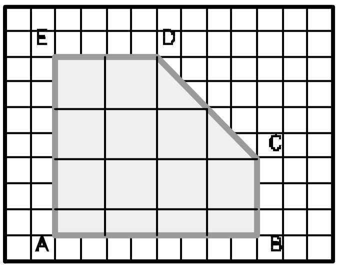
____

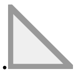
cambio ____________ ____________

fig. 169

Essendo i campioni delle superfici, la grandezza dei sottocampioni può essere la stessa anche se le forme sono diverse. Questo fatto, quando si giungerà alle convenzioni, non sarà più possibile (campioni e sottocampioni devono avere tutti la stessa forma) ma, in questa fase iniziale, è bene che il bambino si abitui al ricoprimento completo e senza trasbordare dai confini della figura.

La soluzione dell'esercizio proposto nella scheda precedente è:



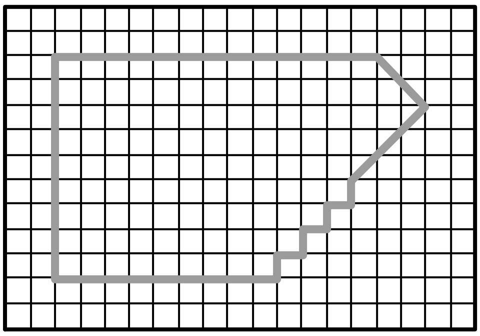
CAMP.  MEZZO CAMP.  MEZZO CAMP. 

___8___ ___4___ + ___2___

___6___

___11___ ___0___

ALTRE SCHEDE:



Ritaglia tanti campioni aventi forma quadrata di lato 1 cm.

Ritaglia alcuni sottocampioni aventi le forme e le dimensioni sotto disegnate.

Incollali in maniera da ricoprire interamente il poligono concavo. Registra il risultato e procedi a fare i cambi.

CAMPIONE 1/2 CAMPIONE 1/4 CAMPIONE

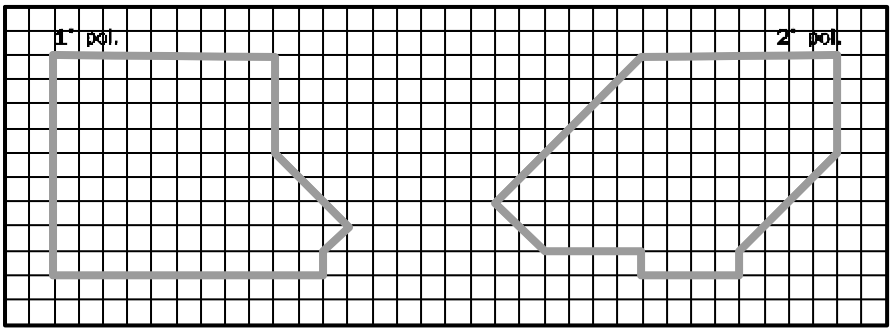
________ ________ + ________ ________ + ________

________ ________

cambio ________ cambio ________

________ ________ ________

fig. 170



Ritaglia campioni quadrati di lato 1 cm e i sottocam-pioni disegnati sotto.

Ricopri i due poligoni e registra:

1°pol.   2°pol.

_____ _____ + _____ _____ + _____ _____ _____ + _____ _____ + _____

______ ______ ______ ______

______ ______ ______ ______

_____ ______ ______ _____ ______ ______

fig. 171

Con riferimento alla scheda della fig. 171, l'insegnante può completarla con domande come le seguenti:
- Quale dei due poligoni ha l'area maggiore ?
- Di quanto è maggiore ?

Anche gli esercizi sul geopiano aiutano a comprendere meglio i ricoprimenti e le aree delle superfici.

Utilizzando gli elastici in maniera da rappresentare il campione quadrato e il sottocampione triangolare, "ricopri" la figura e trova l'area.

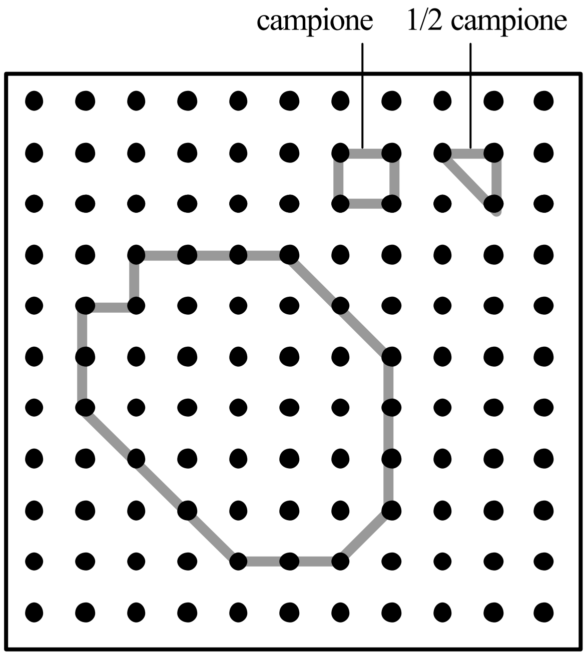
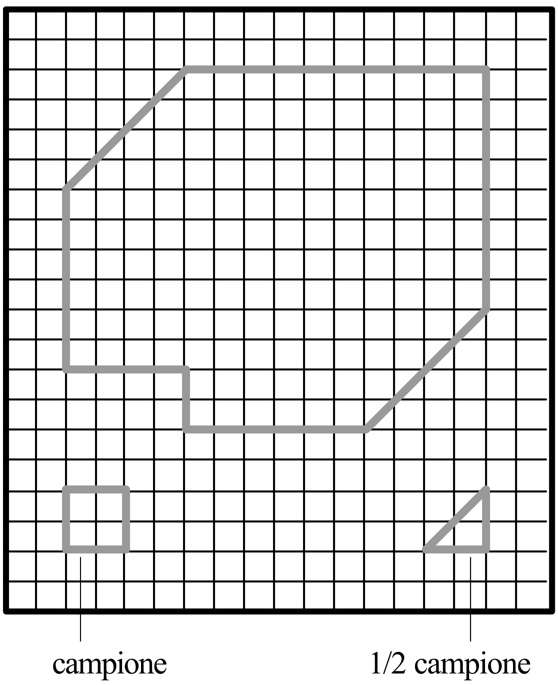


fig. 172

Finora, tranne che per l'esempio sul geopiano, l'area è stata trovata con il ricoprimento vero e proprio, incollando i campioni e i sottocampioni.

Per sveltire la ricerca dell'area, è opportuno sostituire l'atto dell'incollare con quello del tracciare. L'uso della quadrettatura nei prossimi esercizi è indispensabile per i bambini in difficoltà, in ogni caso facilita la percezione e il ritrovamento dell'area a tutti i bambini.



Nel piano a fianco sono stati disegnati un poligo-no concavo, un campione di forma quadrata e un sottocampione di forma triangolare.

Invece di ricoprire incollando campioni ritagliati, con l'aiuto di un righello disegna la raffigurazione del ricoprimento del poligono.

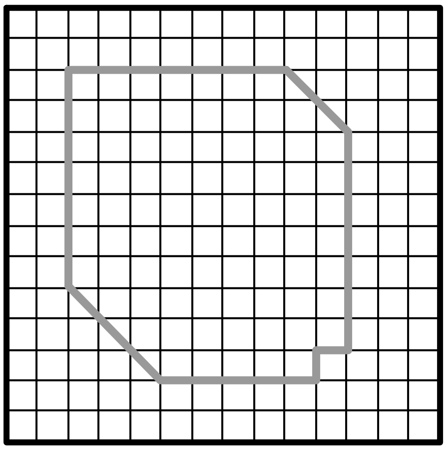
Registra i risultati:

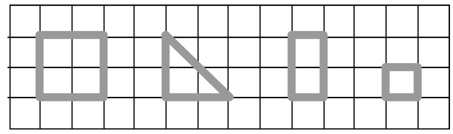
	Campioni	1/2 campioni
RICOPRIMENTO	_______	_______
AREA	_______	_______

fig. 173

Finché non si è nella fase dei campioni convenzionali è bene ricorrere ai sottocampioni aventi forma diversa ma uguale valore. Si abitua così il bambino alla equiestensione, conoscenza che risulterà fondamentale più avanti.

Con l'aiuto di un righello disegna il ricoprimento che risulterebbe utilizzando i campioni e i sotto-campioni indicati. Registra il risultato, fai i cambi e trova l'area del poligono.





RICOPRIMENTO ____ ____ +____ _____

_____

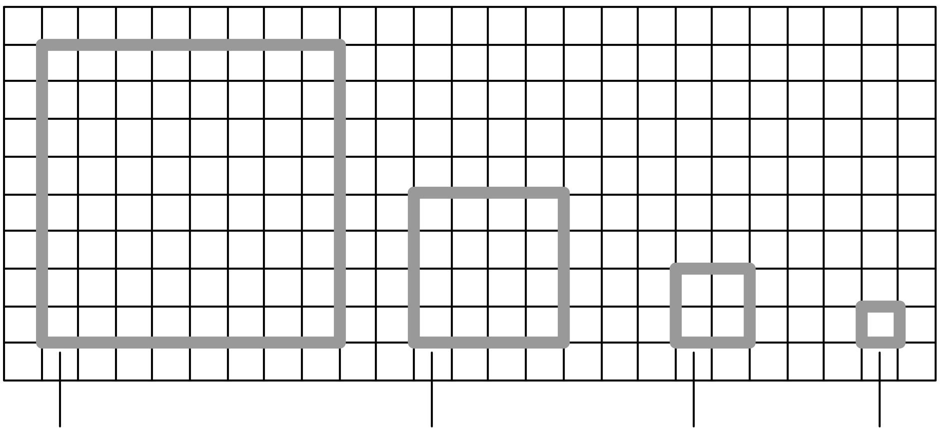
AREA _____ _____ _____

fig. 174

CAMPIONI CONVENZIONALI

I campioni e i sottocampioni utilizzati finora rientrano in un sistema base due, ma, ad esempio, il 1/2 campione non è univoco perché è stato usato con forme diverse. **La convenzione non accetta la non univocità delle forme e pone come condizione che i campioni e i rispettivi sottocampioni abbiano tutti la medesima forma quadrata.**

Ad esempio:



campione 1/4 campione 1/16 camp. 1/32 camp.

fig. 175

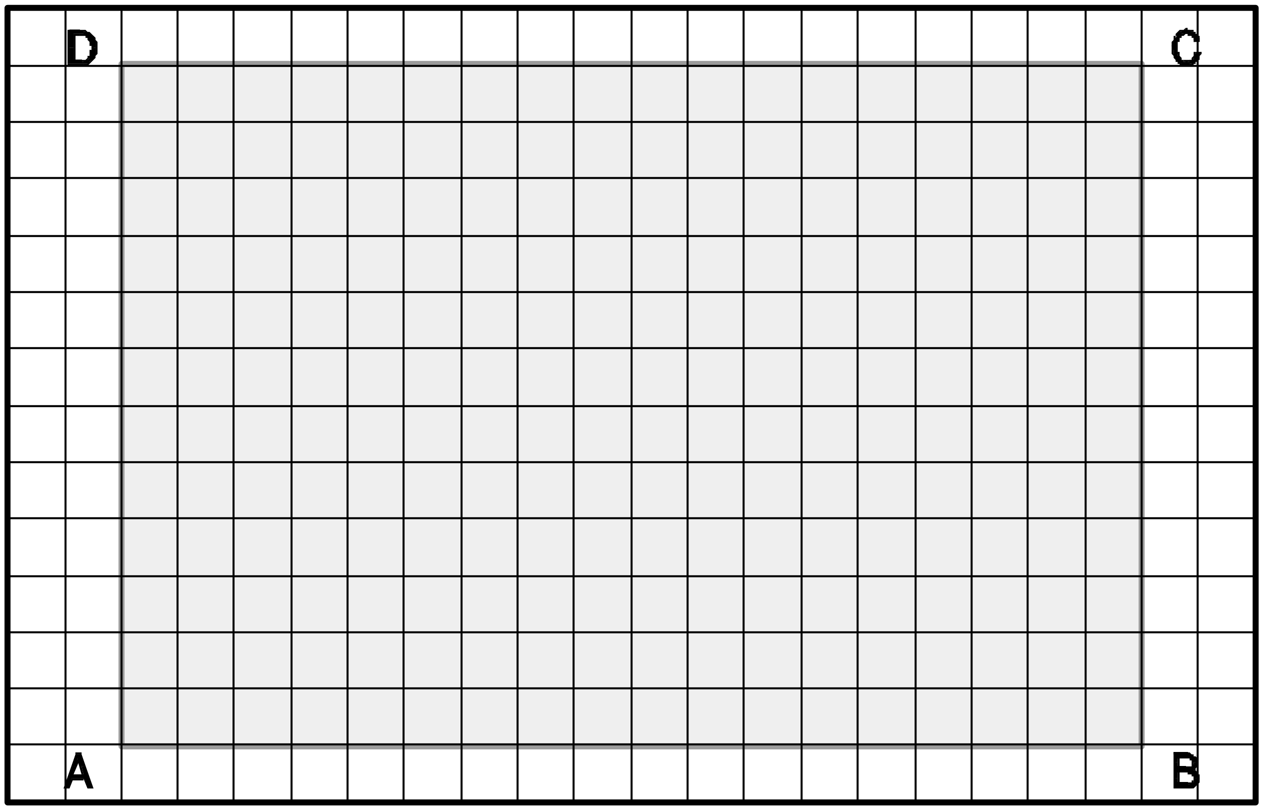
permettono una metrica corretta delle aree (in base quattro).

Analogamente si possono creare metriche in base nove, base sedici, base venticinque, ecc.., cioè con base n² quadrati, ma risulterà impossibile creare metriche base sei, base dieci, ecc.
Infatti, partendo da un quadrato, è impossibile scomporlo in dieci quadrati uguali.
Oltre alla forma quadrata, la convenzione impone una ulteriore restrizione: **I lati dei quadrati campione sono soggetti alla metrica convenzionale delle lunghezze.**
Si avranno perciò campioni quali: il quadrato di lato il metro, il quadrato di lato il cm, ecc. e non si potranno avere, come campioni: il quadrato di lato 23 cm, il quadrato di lato un piede, ecc.
Elencando i campioni convenzionali si hanno:

- ....
- Quadrato di lato 1 km (Kmq o Km²)
- Quadrato di lato 1 hm (hmq o hm²)
- Quadrato di lato 1 dam (damq o dam²)
- Quadrato di lato 1 m (mq o m²)
- Quadrato di lati 1 dm (dmq o dm²)
- ....

Risulta che **il rapporto tra un campione quadrato e il suo immediato sottocampione è di 100 a 1**; ad esempio 1 dam² equivale a 100 m².
Per tale motivo la METRICA convenzionale delle AREE è di tipo CENTESIMALE.

Per porre il bambino nella condizione di manipolare concretamente dei campioni convenzionali, è opportuno utilizzare dei fogli con la quadrettatura di lato 1 cm e costruire i primi campioni: il dm^2 e il cm^2 . Il bambino percepirà che il rapporto tra il dm^2 e il cm^2 è di 1 a 100.



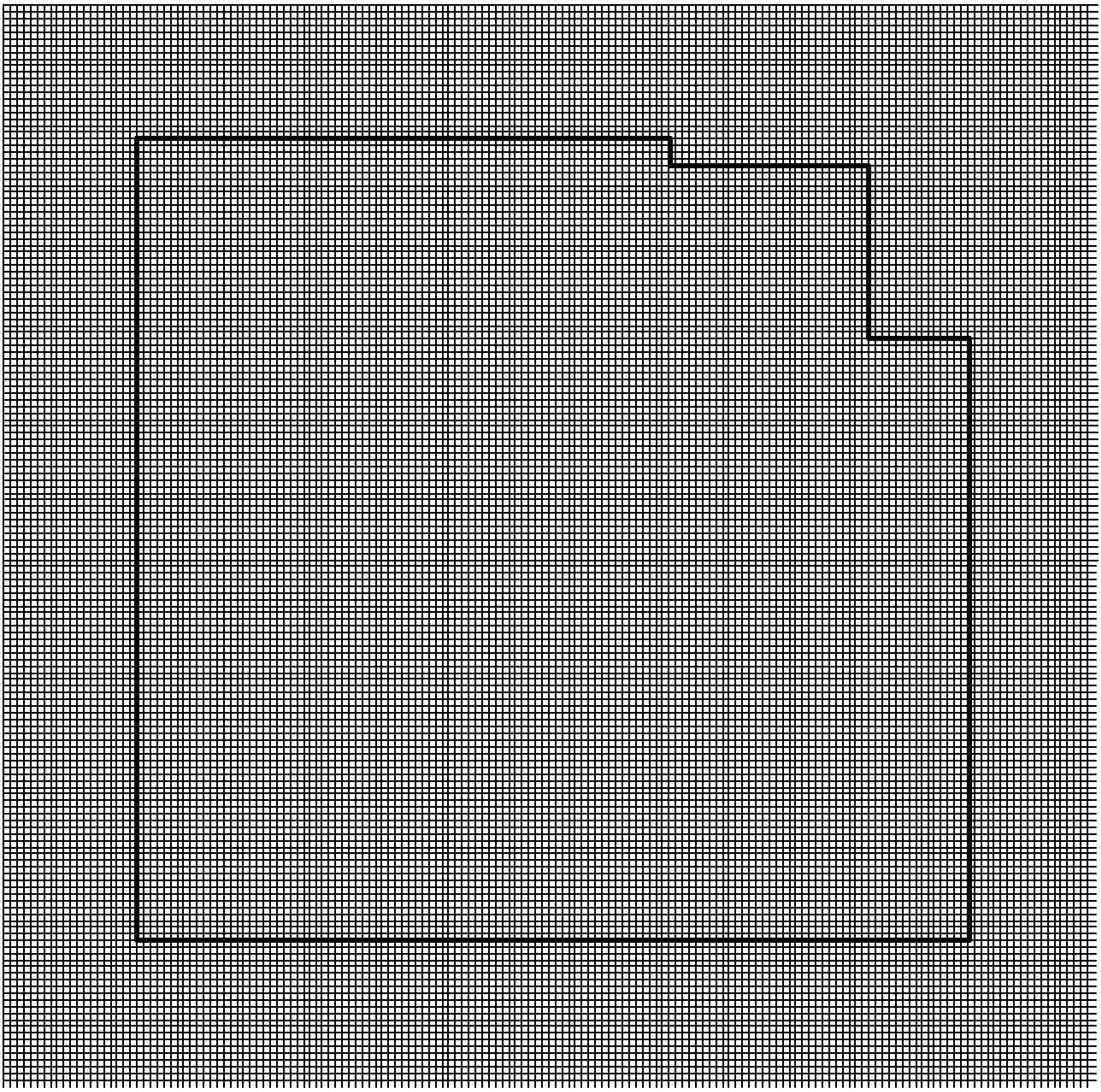
Nel piano ogni quadretto ha il lato di 1 cm.
Effettua il ricoprimento del rettangolo ABCD colorando di azzurro la parte occupata dai campioni dm^2 e di giallo la parte occupata dai campioni cm^2.
Registra i risultati e fai i cambi in maniera da ottenere l'area del rettangolo.

	dm^2	cm^2
RICOPRIMENTO	_____	_____
AREA	_____	_____

fig. 176

Successivamente si propongono esercizi che richiedono l'utilizzo di almeno tre campioni. L'impiego del foglio millimetrato permette di lavorare con il dm^2, con il cm^2 e con il mm^2 .

Forse all'inizio non è bene proporre al bambino i fogli millimetrati esistenti in commercio perché, nel tracciare le linee, lo spessore che il bambino ottiene con la matita, o con il pennarello, è ben maggiore del millimetro. Dovendo contare anche i mm^2 che servono per il ricoprimento, il bambino non sa se quelli coperti dal tratto vanno contati oppure no.
Si aggiunge poi, per i bambini meno dotati, l'inconveniente del disturbo spaziale proveniente da una densità di elementi troppo elevata.
Un modo per ovviare agli inconvenienti citati consiste nel far uso di fotocopie ingrandite del foglio millimetrato. In tal caso è chiaro che le unità dm, cm e mm sono proposte in scala ingrandita, non è quindi possibile permettere l'uso del righello millimetrato.

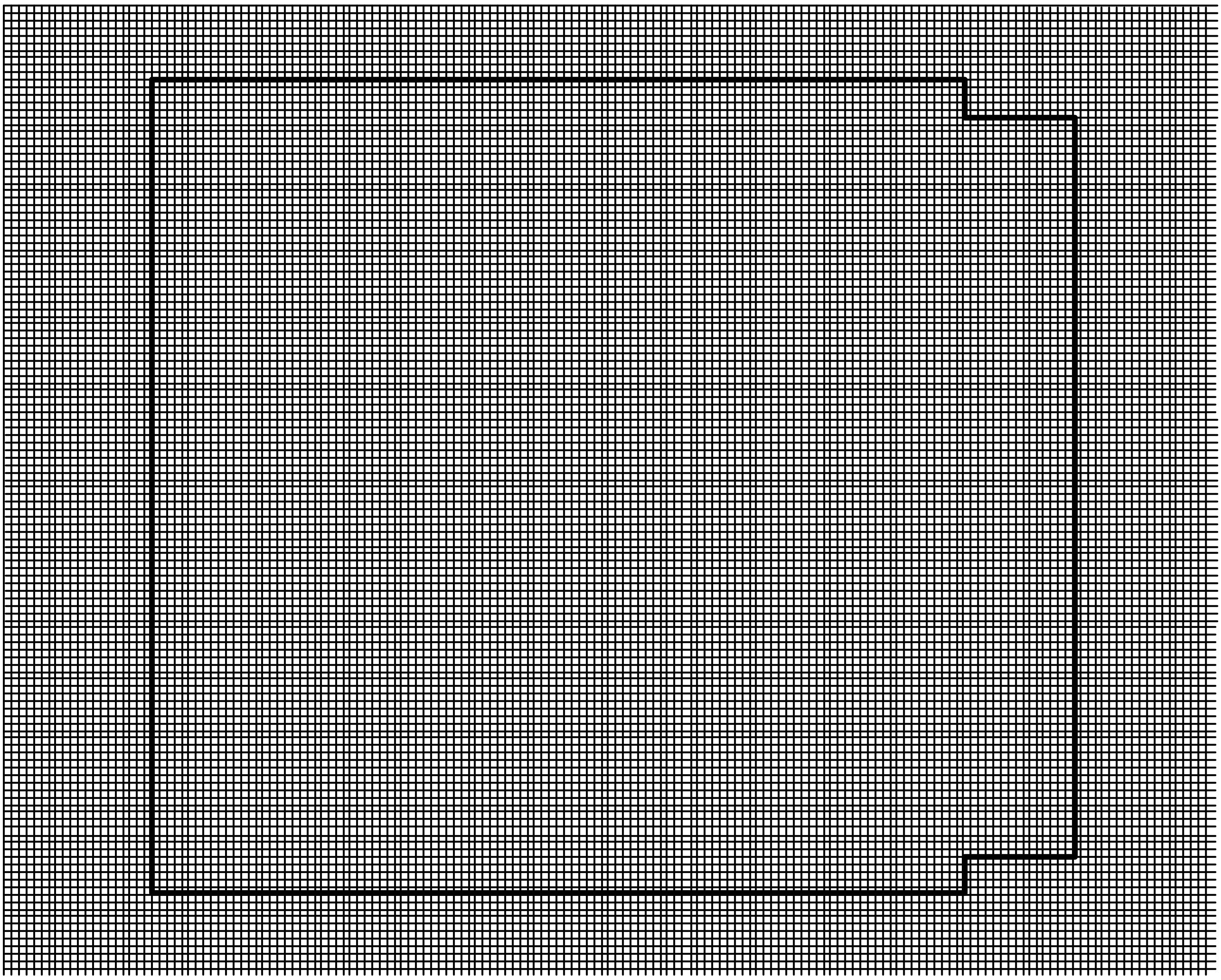


Colora di azzurro la parte occupata dai campioni dm² e di giallo la parte occupata dai campioni cm², non colorare la parte occupata dai campioni mm². Registra e trova l'area del poligono.

	dm²	cm²	mm²
RICOPRIMENTO			
cambio			
AREA			

fig. 177

Analogamente a quanto fatto nel sistema metrico decimale relativo alle lunghezze, è necessario esprimere il valore dell'area utilizzando un solo campione, ricorrendo di conseguenza ai numeri con la virgola. Per far questo, si ricorre alla metodologia ed agli schemi già adottati.



Traccia i contorni dei campioni dm² e cm² in modo da ottenere un ricoprimento fatto di 1 dm² e di 31 cm², oltre ai rimenenti mm².
Completa poi la tabella ricordando che la scrittura dell'area, utilizzando un solo campione, necessita, a volte, di numeri con la virgola.

	dm²	cm²	mm²
RICOPRIMENTO			
AREA			

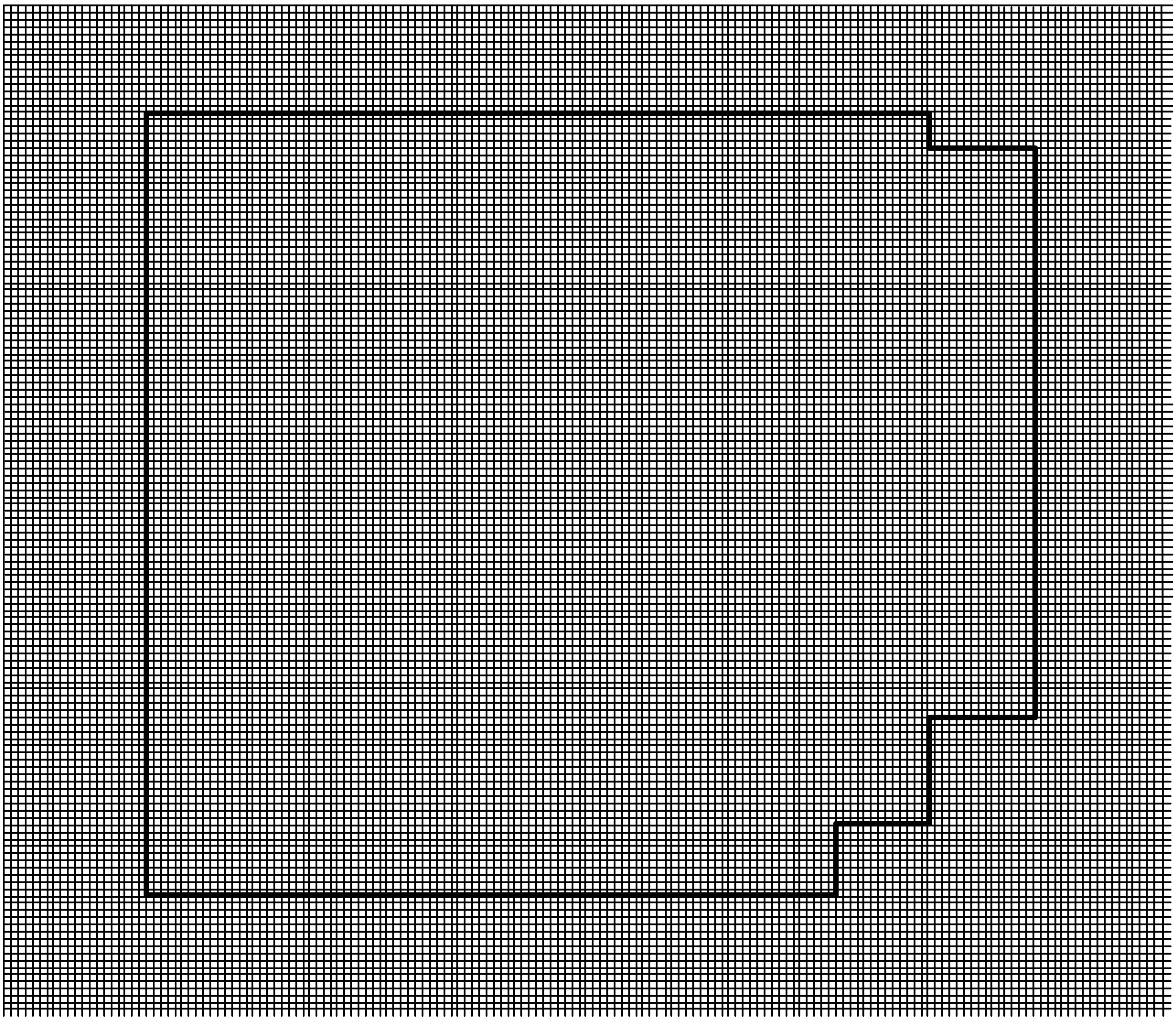
SCRITTURA
dm²
cm²
mm²

fig. 178

La soluzione, per la parte della tabella, è la seguente:

	dm²	cm²	mm²
RICOPRIMENTO	1	31	400
AREA	1	35	00
		135	00
			13500

SCRITTURA	
dm²	1,35
cm²	135
mm²	13500



Fai un ricoprimento colorando d'azzurro il campione dm² e di giallo i campioni cm².

Completa poi la tabella ricordando che la scrittura dell'area, utilizzando un solo campione, necessita, a volte, di numeri con la virgola.

	dm²	cm²	mm²
RICOPRIMENTO			
AREA			

SCRITTURA
dm²
cm²
mm²

fig. 179

Con questa scheda si rimarca come *il sistema metrico centesimale si differenzia da quello decimale*.

Nei cambi, il bambino, abituato al sistema metrico decimale, spontaneamente potrebbe interpretare 1 dm² e 4 cm² come 14 cm², invece di 104 cm². Per evitare di incorrere in errori, è bene *scrivere la quantità di campioni in esame utilizzando sempre due cifre, anche quando ne basterebbe una*.

Se, ad esempio, l'area di un poligono è di 1 dm², 86 cm² e 40 mm², la compilazione più corretta è la seguente:

dm²	cm²	cm²
01	86	40
	0186	40
		018640

SCRITTURA				
dm²	01,8640	=	dm²	1,8640
cm²	0186,40	=	cm²	186,40
mm²	018640	=	mm²	18640

fig. 180

Si devono proporre esercizi reversibili: con l'area espressa con un solo campione (in forma compatta) il bambino deve scomporla nei vari campioni sottintesi (in forma estesa).

Ad esempio:

"L'area dell'orto di Giovanni è di dm² 2.345,52. Esprimi la misura assegnata utilizzando tutti i cam-pioni necessari".

La soluzione è:

misura dell'area

dm² 2345,52

campioni necessari

m²	dm²	cm²
23	45	52

fig. 181

Analogamente, per cm² 456,40:

misura dell'area

cm² 456,4

campioni necessari

m²	dm²	cm²
04	56	40

fig. 182

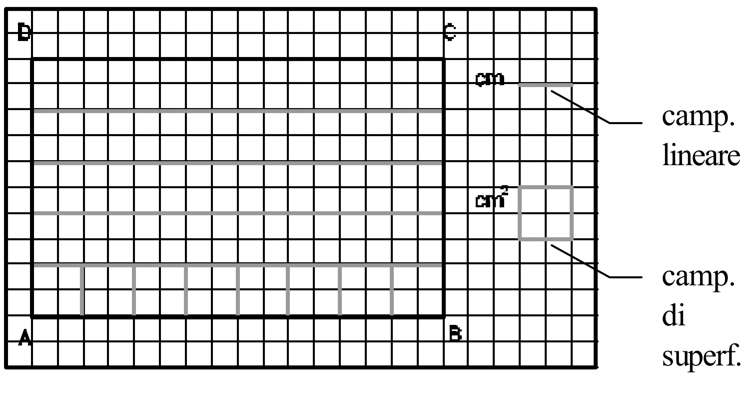
PROBLEMA:
Misura i lati di un'aula rettangolare utilizzando i campioni lineari m e dm; fai una rappresentazione in scala dell'aula e trova la sua area mediante il ricoprimento con i campioni in scala m² e dm².

PROBLEMA:
La casa di Marco è situata su un terreno di forma rettangolare lungo 3,4 dam e largo 2,6 dam. Disegna il terreno in scala e "ricoprilo" usando i corrispondenti campioni in scala dam² e m². Quanto è l'area del terreno? Esprimila utilizzando prima solo il dam² e poi solo il m².

PROBLEMA:
L'area di una aiuola di forma rettangolare è di 320 m². Quanti dam² ? Disegnala in scala, sapendo che la sua larghezza è di 20 metri.

AREA DEI RETTANGOLI

Finora l'area è stata trovata come conteggio della quantità dei campioni utilizzati per il ricoprimento.
Per alcune figure l'area può essere trovata mediante calcolo e il primo approccio a ciò che è chiamato *calcolo dell'area* si ha con figure rettangolari. Infatti, nelle forme rettangolari, è facile vedere i campioni che le ricoprono come schieramenti e, quindi, calco-larli mediante moltiplicazione.



Il rettangolo disegnato ha:
base AB = 8 cm
altezza BC = 5 cm
Sulla base è stata costruita una riga affiancando i campioni cm². Senza completare il ricoprimento, si deve trovare l'area del rettangolo.

n° cm² sulla base : ___________
n° di volte che vanno ripetuti: ___________

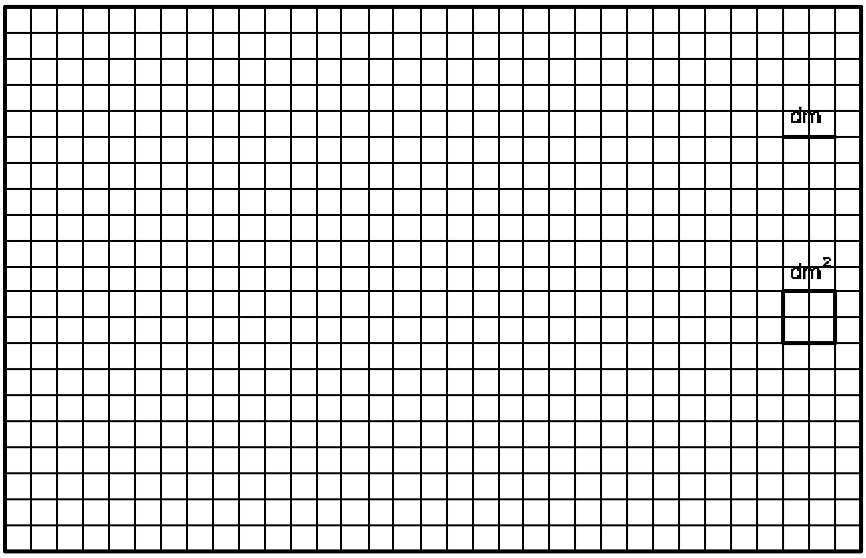
AREA RETTANGOLO = cm² ______ x _____ volte = cm² _____

fig.183

Quindi:
L'area di un rettangolo si può calcolare moltiplicando tanti quadrati-campione quanti se ne possono disporre su di un lato (riga di quadrati), per tante volte quanti se ne possono disporre sull'altro lato.
E' questo l'inizio del "calcolo dell'area", procedura che permette di ottenere più semplicemente gli stessi risultati del ricoprimento con i campioni.

Altri esercizi devono riguardare superfici reali e molto ben conosciute dal bambino:

PROBLEMA:
Il ripiano rettangolare della cattedra ha i lati lunghi rispettivamente 13 dm e 8 dm. Disegna il ripiano in scala nel piano quadrettato.
Disegna la riga dei dm² che sta sulla base.
Trova poi l'area del ripiano calcolandola prima in dm² e trasformandola poi in m².



n° di dm² cha stanno sulla riga di base:

____

n° di volte che bisogna ripetere la riga di dm² per ricoprire il piano:

____

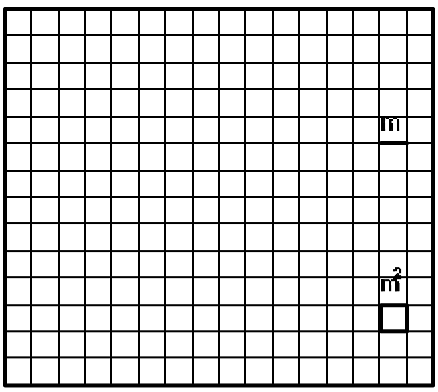
AREA = dm² __________ x __________ = dm² __________

	m²	dm²
AREA		

AREA in
dm²
m²

fig. 184

PROBLEMA:
Il giardino di Ebe è di forma quadrata ed ha i lati lunghi 11 m. Disegnalo usando la scala indicata e trova l'area in dam².



AREA = m² ________ x ________ = m² ________

Quando un numero viene moltiplicato per se stesso, si dice che il numero viene ELEVATO AL QUADRATO (perché è solo con le aree del quadrato che un numero viene moltipli-cato per se stesso). Il modo per scriverlo è il seguente:

NUMERO x NUMERO = (NUMERO)²

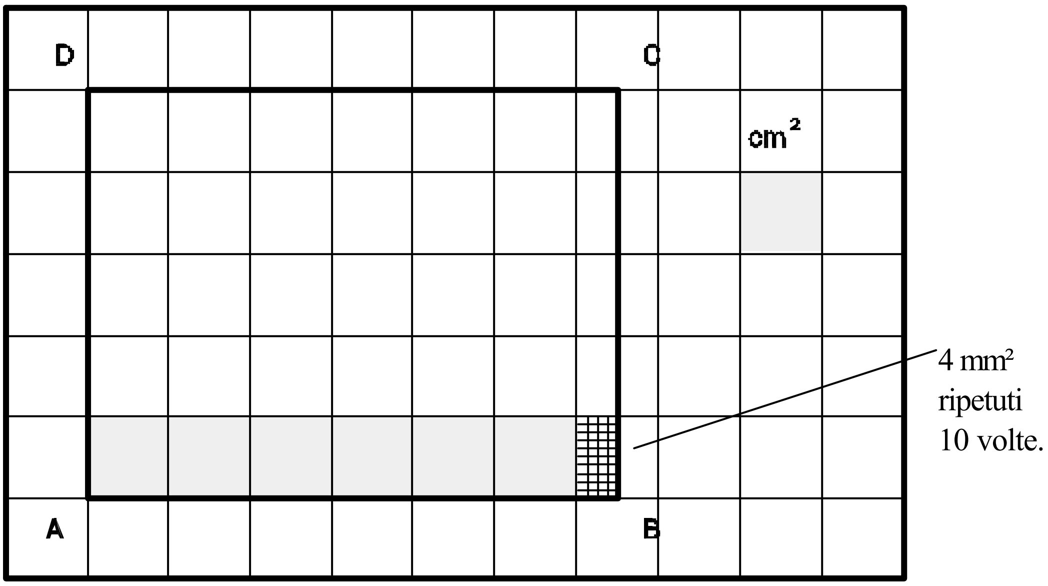
Quindi:
AREA = m² (______)² = m² ______ = dam² _____

fig. 185

Si giunge alla prima formula per il calcolo delle aree:

AREA QUADRATO = unità² (NUMERO LUNGHEZZA LATO)²

Il primo scoglio nel calcolo delle aree dei rettangoli si presenta quando le dimensioni della base non si possono esprimere con un numero intero.
E' necessario procedere con gradualità e ricorrere ai sottocampioni, ricordando che se si ha una parte di base di 0,3 unità, su questa parte, per completare la riga non bastano 3 sottounita² ma occorrono 30 sottounita², questo perché i cambi, per le superfici, sono di 1 a 100.



Nel piano quadrettato è stato disegnato un rettangolo avente la base AB di 6,4 cm e l'altezza di 5 cm.
Completa la scheda in modo da giungere al calcolo dell'area del rettangolo ABCD.

n° di cm² interi per ogni riga: ________
n° di mm² per completare ogni riga: ________
ogni riga completa è formata da: cm² ________ e mm² ________
è vero che ogni riga completa è di cm² 6,40 ? _______

AREA = cm² 6,40 x _______ = cm² _______

fig. 186

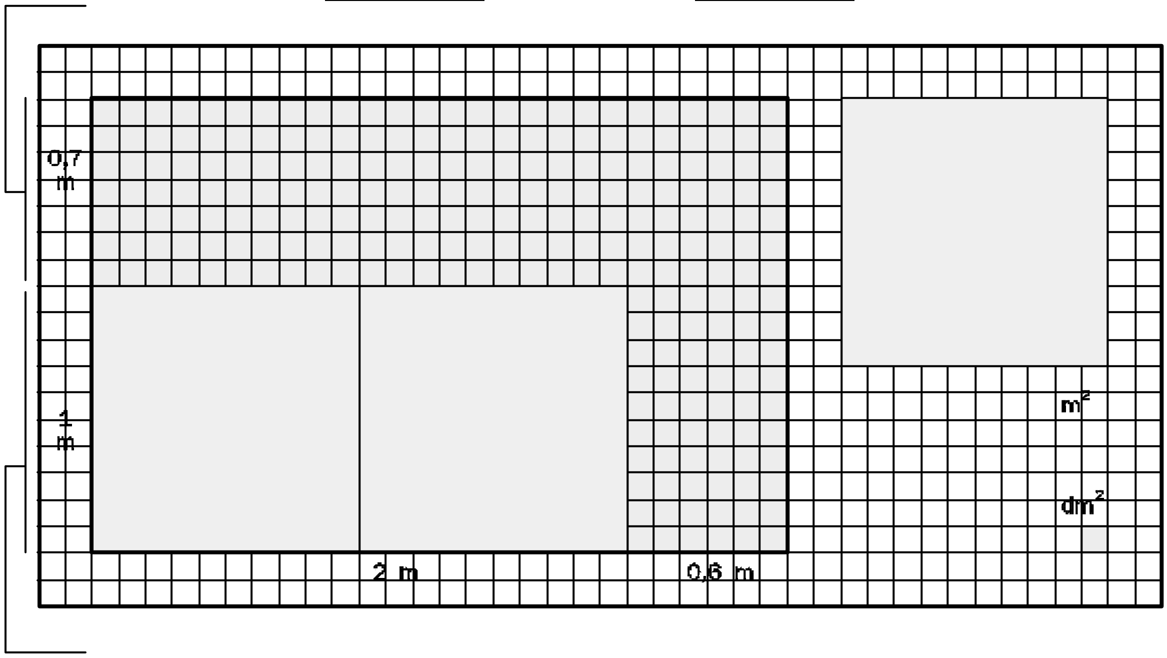
Si può quindi giungere a una prima conclusione:

"*L'area di un rettangolo si può calcolare moltiplicando il numero di quadrati e di parti di quadrato, che servono per formare la prima riga appoggiata sulla base, per tante volte quanto è il numero di righe che completano l'altezza*".

Ulteriori difficoltà si aggiungono quando anche l'altezza viene espressa con lunghezze in forma decimale.

PROBLEMA:
Una tovaglia di forma rettangolare ha i lati lunghi 2,6 m e 1,7 m. Trovare la sua area in m².

AREA 1^ RIGA = m² __________ x 0,7 = m² __________



AREA 2^ RIGA = m² __________ x 1 = m² __________

Quindi l'area totale, risultando dalla somma delle aree delle due righe, sarà:

AREA TOTALE = m² __________ x 1,7 = m² ___________

fig. 187

Da questi esempi si ricava la regola relativa al calcolo dell'area dei rettangoli:

AREA RETTANGOLO = unita² (NUM. MISURA BASE x NUM. MISURA ALTEZZA)

cioè:
tanti quadrati quanto è la misura di un lato per tante volte quanto è la misura dell'altro lato.

Il calcolo delle aree di altre forme poligonali verrà presentato più avanti, nel capitolo inerente le trasformazioni di equiestensione.

12.
METRICA DEGLI ANGOLI

LE DIREZIONI

L'angolo, che è stato presentato come parte di piano delimitata da due semirette aventi l'origine in comune, permette di interpretare alcuni aspetti della realtà, ma non tutti. *Gli aspetti dinamici risultano difficili da spiegare attraverso la parte di piano*.
Ad esempio: "una ruota gira con velocità angolare di 540° al secondo" è una frase comunemente usata in meccanica e si parla di angolo, e di ampiezza angolare non riferita alla parte di piano, ma vista come un cambiamento di direzione che avviene nel tempo: un raggio uscente dal centro della ruota, raggio pensato come semiretta, cambia la sua direzione ruotando attorno al perno di 1 giro e mezzo ogni secondo.

Direzione: *è una relazione di equivalenza tra rette del piano che sono parallele o coincidenti*.
Cioè **due rette parallele o due rette coincidenti hanno la stessa direzione e le rette aventi una medesima direzione sono parallele o coincidenti**.

Ogni retta individua *una direzione e può essere percorsa in due versi diversi ed opposti* (se ci riferiamo al percorso di un bambino, questo può essere effettuato avanzando o indietreggiando).
In geometria, quindi, la direzione non è da intendersi con il verso.
In geografia la direzione viene concepita in maniera diversa e viene associata al concetto di semiretta che contiene implicitamente anche il verso (dal punto origine verso il confine del piano).
Le direzioni Nord, Sud in geografia sono direzioni opposte, mentre analizzate da un punto di vista geometrico, appartengono alla stessa retta e pertanto individuano un'unica direzione.
Nel linguaggio comune si è portati a dare alla parola direzione il significato geografico. Il bambino, quando si posiziona per compiere uno spostamento, pensa a quella posizione come all'origine di una semiretta, e il verso che assumerà lo interpreta come direzione.

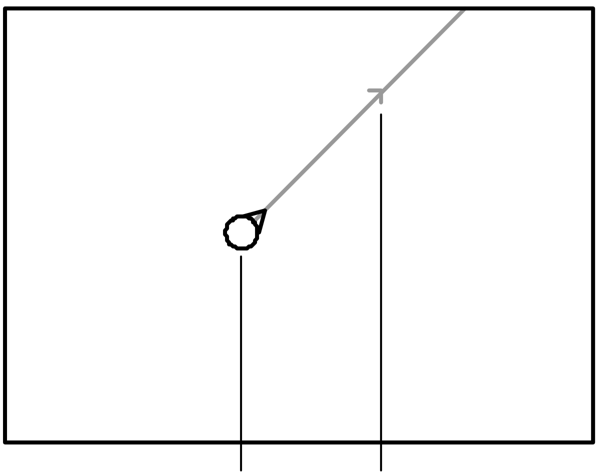


fig. 188

Perciò il bambino interpreta la direzione come "**direzione con un verso**".
Ma anche in informatica, nel linguaggio LOGO, le direzioni vengono indicate con valori numerici sessagesimali e le direzioni 90° e 270° sono ritenute direzioni opposte (equivalenti, in geografia, alle direzioni EST-OVEST), mentre in geometria sono versi opposti di una stessa direzione.

In questa proposta, che presenta l'angolo come la rotazione di una semiretta attorno alla sua origine, *si associa il nome "direzione" alla semiretta*. Quindi anche se in geometria non è corretto, per esigenze didattiche alla parola "direzione" sarà associato anche il concetto di verso senza la necessità di esplicitarlo.

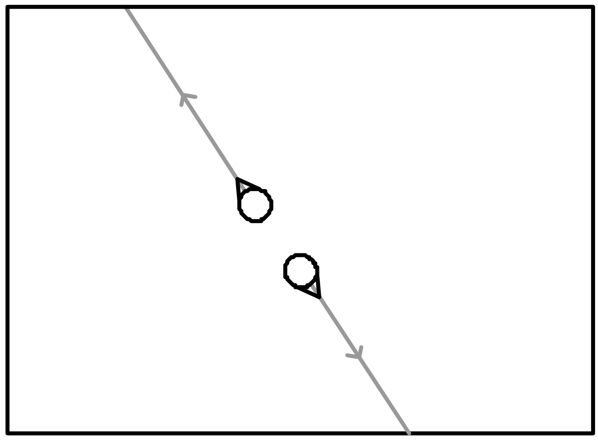


fig. 189

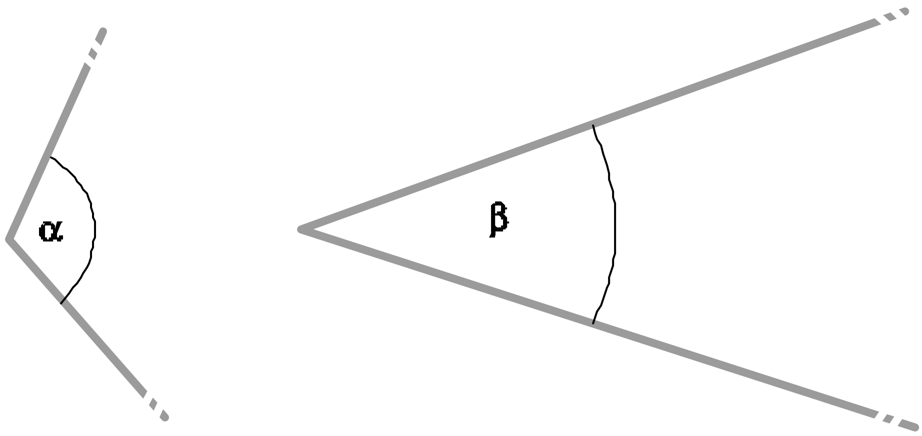
Facendo riferimento alla figura, si dice, secondo il linguaggio comune (che è anche il linguaggio del bambino), che i due bambini vanno in direzioni opposte, mentre, in un discorso rigorosamente geometrico, percorrono la stessa direzione ma con due versi opposti.

ANGOLO COME CAMBIAMENTI DI DIREZIONE

La misura degli angoli può essere fatta con due metodi diversi: quello del campione, che viene riportato più volte fino a completare l'intero angolo e quello del cambiamento di direzione, dove la misura angolare dipende dal concetto di direzionalità. Il primo metodo presenta degli inconvenienti di tipo didattico, fra i quali:

- il campione angolo non è ben definibile perché se visto in geometria euclidea dovrebbe proseguire all'infinito, se visto nella geometria dei piani finiti, a volte fuoriesce e a volte non arriva al confine del piano;
- procedendo per ricoprimento, il bambino confonde l'ampiezza angolare con l'estensione della superficie dell'angolo e tende ad interpretare la misura dell'angolo come l'area dello stesso.

Anche nella stessa geometria euclidea ci sono degli inconvenienti, infatti angoli disegnati con lati ridotti appaiono, come quantità di superficie, minori di altri disegnati con lati più lunghi:



Nel caso di angoli della geometria euclidea, come quelli disegnati a fianco, i bambini, molto spesso, consi-derano l'angolo α mi-nore dell'angolo β.

fig. 190

L'approccio all'angolo e alla sua misura attraverso il cambiamento di direzione presenta notevoli vantaggi:

- permette di identificare l'angolo nei fenomeni dinamici di rotazione, identificazione difficile quando l'angolo è presentato solo come parte di piano;
- attraverso la dinamicità è possibile comprendere anche angoli maggiori dell'angolo giro, mentre nel piano l'angolo è al massimo ampio come l'angolo giro;
- il cambiamento di direzione non può essere confuso con la estensione delle superfici e si evidenzia la completa indipendenza di una metrica rispetto all'altra.

Per evidenziare ulteriormente i vantaggi della concezione dell'angolo come cambiamento di direzione è sufficiente fare riferimento alle esperienze comuni legate ai percorsi:

Nella figura 191 è raffigurato il percorso che l'automobile compie partendo da A e arrivando in B.
Effettua un cambiamento di direzione di 270° (ampiezza di un angolo e non estensione di una superficie).

Attraverso la dinamicità è possibile introdurre i numeri relativi nella metrica degli angoli e distinguere un angolo di -30° da uno di +30°. Ad esempio (fig. 192), nella strada A l'automobile compie un cambiamento di direzione di 30° a sinistra, mentre nella strada B è di 30° a destra. Secondo la convenzione si ha: -30° e +30°.

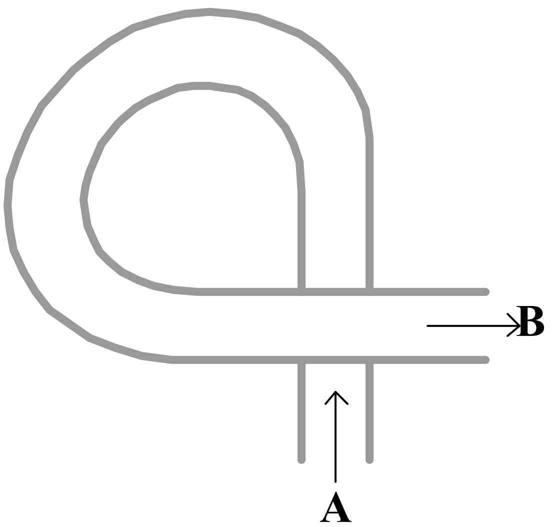


fig. 191

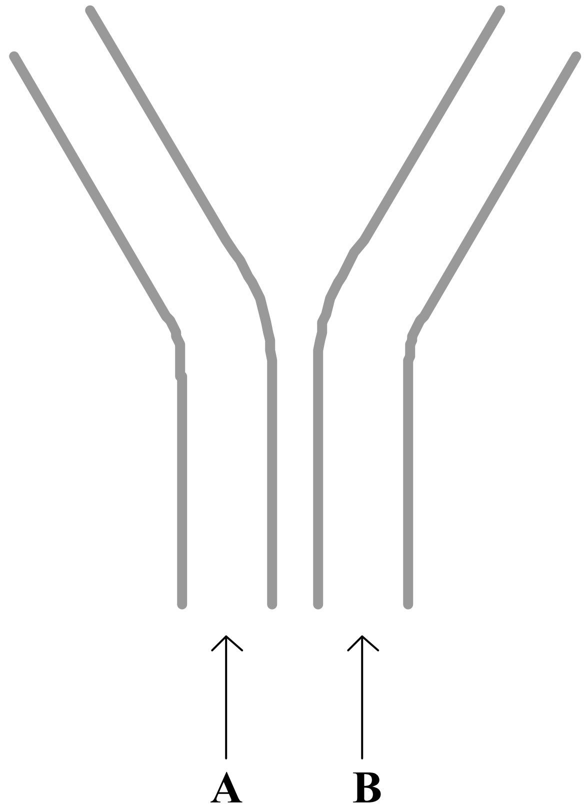


fig. 192

L'angolo come cambiamento di direzione può essere vissuto con il corpo compiendo rotazioni sull'asse corporeo. Il bambino, prima ancora di avere la nozione di metrica angolare, percepisce la quantità di cambiamento di direzione attraverso la rotazione sul proprio asse corporeo. Per ottenere questo è stato costruito un sussidio psicomotorio che agevola l'interiorizzazione, attraverso il proprio corpo, della quantità del cambiamento di direzione.
Questo sussidio è stato ideato dai professori *Carlo Appiani e Pietro Cazzago* e da loro sperimentato con efficacia anche con i bambini portatori di handicap.
Per costruirlo ci si è rivolti ad artigiani capaci di fare anche buoni lavori di meccanica, dato che è necessario usare dei cuscinetti per eliminare il più possibile l'attrito.

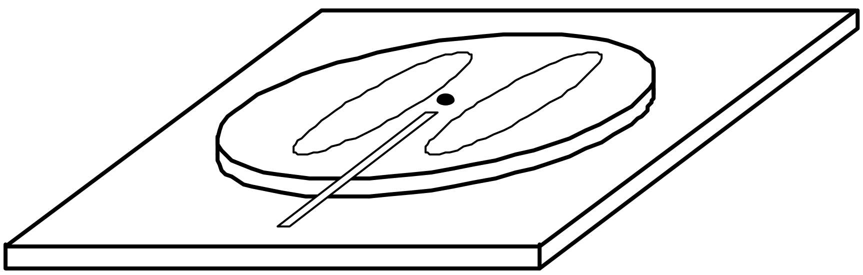


fig. 193

La pedana consta di una base di legno di forma quadrata delle dimensioni di circa 80 cm. Al centro di essa viene imperniato un disco del diametro di circa 50 cm. Sul disco vengono incollate due pedane di gomma e un bastoncino con la funzione di indicare la direzione del bambino posizionato sulla pedana.
Il bambino, dopo essere salito sulla pedana, deve, con una spinta, cambiare la propria direzione. Per ottenere ciò, deve accumulare energia potenziale sotto forma di torsione e liberarla poi in energia cinetica sotto forma di movimento di rotazione.
Più è ampia la rotazione da effettuare, più elevata deve essere l'energia potenziale di torsione accumulata e più rapido deve essere il tempo in cui essa verrà liberata.
In tal modo il bambino associa la quantità di cambiamento di direzione allo sforzo fisico compiuto. Quindi *il*

messaggio "angolare" viene interiorizzato con l'uso del corpo.

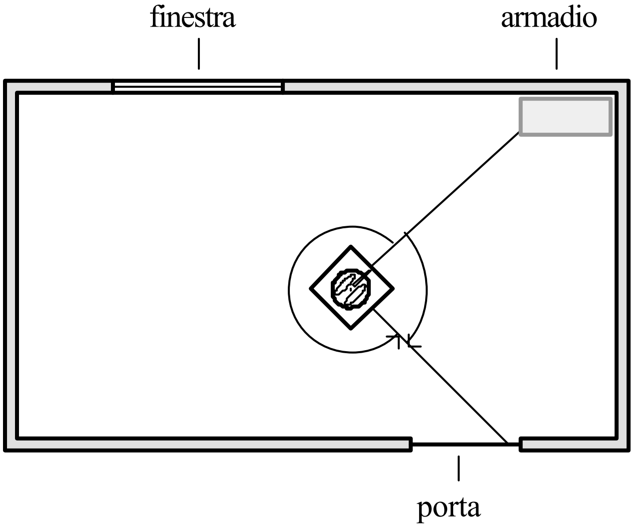


fig. 194

ESEMPIO:
Il bambino posizionato sulla pedana nella direzione dell'armadio, deve farla ruotarla in maniera da dirigersi verso la porta. Ripresa la direzione iniziale, il bambino deve di nuovo dirigersi verso la porta ruotando nel senso opposto al precedente. Domanda: "E' maggiore il cambiamento di direzione effettuato in senso orario o quello effettuato in senso antiorario?".
La risposta sarà suggerita al bambino dalla diversità degli sforzi compiuti per ottenere i due cambiamenti di direzione.

Tale metodo consente di far comprendere la differenza tra angolo e superficie.

Col prossimo esercizio si vuol proprio raggiungere tale obiettivo ancora prima di affrontare l'ampiezza angolare come fatto anche numerico.

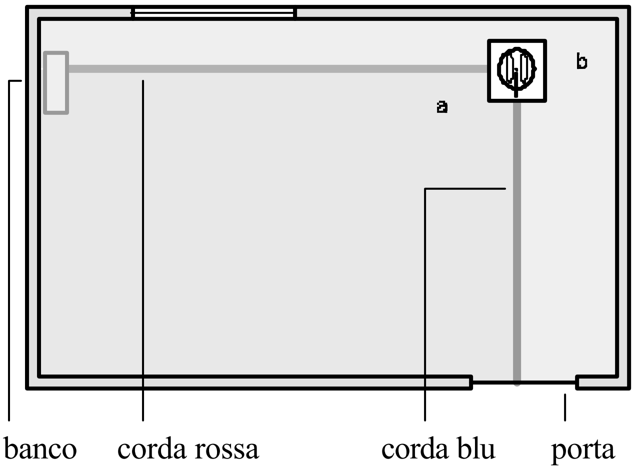


fig. 195

Nell'aula vengono posizionate due corde che partono dalla pedana e vanno una verso la porta e l'altra verso un banco appoggiato al confine della stanza (si tratta di due semirette che dividono la stanza in due angoli). Lavorando su un piano finito, gli angoli, anche se la misura della loro area non ha significato, possono essere ricoperti da campioni quadrati e risulta che l'area di "a" è maggiore dell'area di "b", cioè "a" è più esteso di "b". Se il bambino viene invitato a descrivere tali angoli con cambiamenti di direzione effettuati con la pedana, dirà che il cambiamento di direzione fatto per descrivere "b" è maggiore di quello fatto per descrivere "a", cioè il cambiamento di direzione "b" è maggiore del cambiamento di direzione "a".
Quindi l'ampiezza di "b" è maggiore dell'ampiezza di "a".

Si è in un caso dove ad estensione maggiore corrisponde ampiezza minore e viceversa.

Da qui si evidenzia come la metrica delle aree non è utilizzabile come metrica degli angoli.

LE DIREZIONI NELL'OROLOGIO

Per introdurre il momento strettamente metrico dell'angolo (associare all'angolo un valore numerico e ...) è necessario riferirsi alle direzioni che vengono codificate attraverso numeri.

L'esperienza più vicina al bambino che mostra alcune direzioni associate ai numeri è quella dell'orologio con le lancette. Le direzioni usate sono 12 e vengono numerate secondo il verso orario.

E' opportuno costruire un orologio con una sola lancetta per indicare la direzione. Si chiede al bambino di assumere con il proprio corpo nello spazio le direzioni che il maestro indicherà usando tale sussidio.

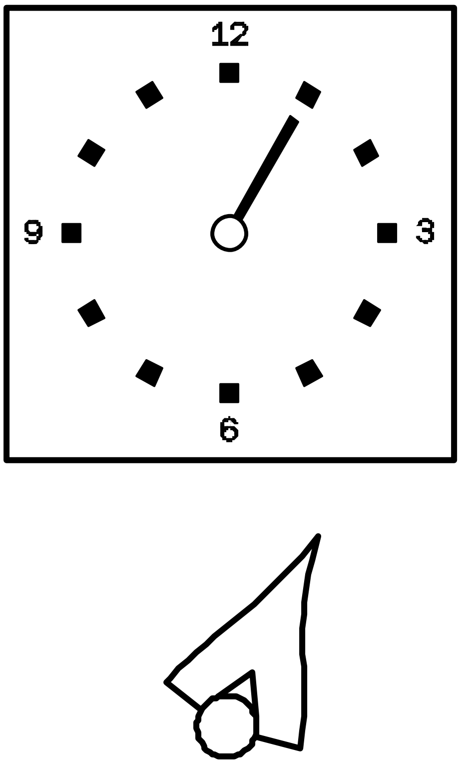


fig. 196

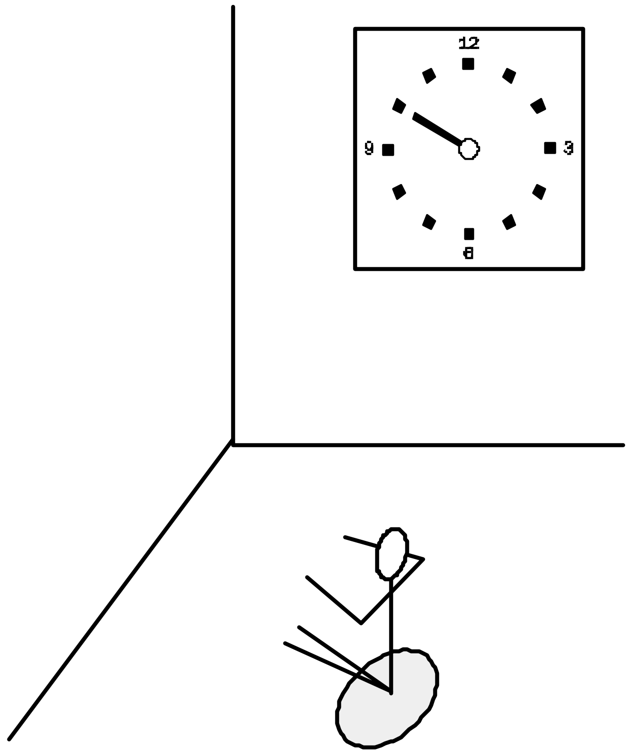


fig. 198

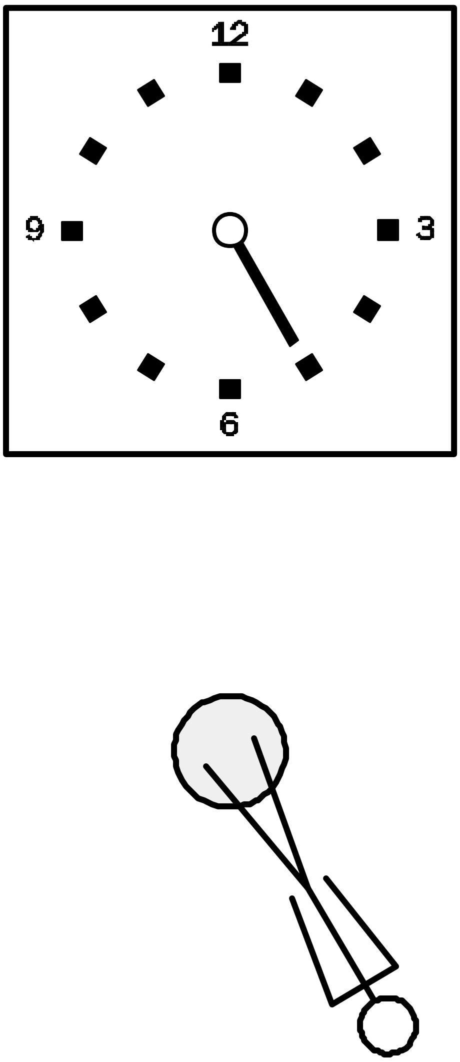


fig. 197

Ad esempio: l'orologio viene posato sul pavimento (fig. 196); il bambino, in piedi su un punto stabilito, si direziona con le braccia tese e le mani unite come la lancetta ed indica la direzione assunta.
Nell'esempio in figura, la risposta è: "mi sono direzionato come la lancetta sull'ora 1".
Altri comandi:"direzionati secondo le ore 8", "assu-mi la direzione che avrebbe la lancetta quando segna le ore 5", ecc.

Analoghi esercizi si fanno posizionando il bambino supino con i piedi sul punto stabilito (fig. 197).
E' l'intero corpo, visto dai piedi alla testa, che stabilisce la direzione indicata dalla lancetta.
Per eseguire questo esercizio, i bambini guardano l'orologio e poi si sdraiano in maniera opportuna.
Per evitare il rialzarsi, il guardare e il risdraiarsi, si appende l'orologio alla parete, in modo che il bambino possa vederlo.
La corrispondenza in tal caso, risulta più difficile perché il piano dell'orologio e il piano delle direzionalità del bambino non coincidono.

Altri esercizi più facili, analoghi ai precedenti, si possono proporre facendo sedere il bambino sul punto stabilito e chiedendogli di indicare la direzione utilizzando le gambe unite (fig. 198).

Una evoluzione, che serve per portare il bambino a dominare due direzioni contemporaneamente, si ottiene utilizzando un orologio con due lancette della stessa lunghezza. Questa fase è importante per vedere poi l'angolo come cambiamento da una direzione ad un'altra e quindi, mentalmente, raffigurarsi sia la direzione di partenza sia la direzione di arrivo.

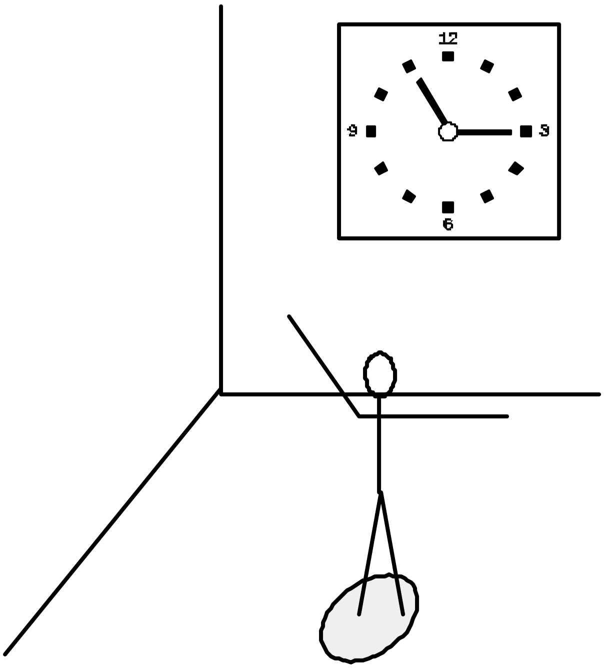


fig. 199

ESERCIZIO:
Consegna: "metti le braccia in modo da riprodurre le direzioni indicate dalle lancette dell'orologio e verbalizzale distinguendo il braccio destro dal braccio sinistro".
Nell'esempio illustrato (fig. 199), il bambino risponderà: "il braccio destro è nella direzione 3; il braccio sinistro è nella direzione 11".

Per verificare se il bambino ha raggiunto l'obiettivo del riconoscere le dodici direzioni proposte finora, si dispone sul piano "pavimento" una semiretta "corda" indicante la direzione 12 (fig. 200). Il bambino si posiziona sulla origine della "semiretta ore 12" e deve, ad esempio, eseguire la seguente consegna:
"parti in direzione 5 ore e rientra in direzione 8 ore dopo aver percorso il tratto di confine del piano necessario".

Nella fig. 201 è rappresentata una soluzione. La precisione dei percorsi è ovviamente relativa. In ogni caso non devono essere ammessi errori sull'ordine di un'ora o più.

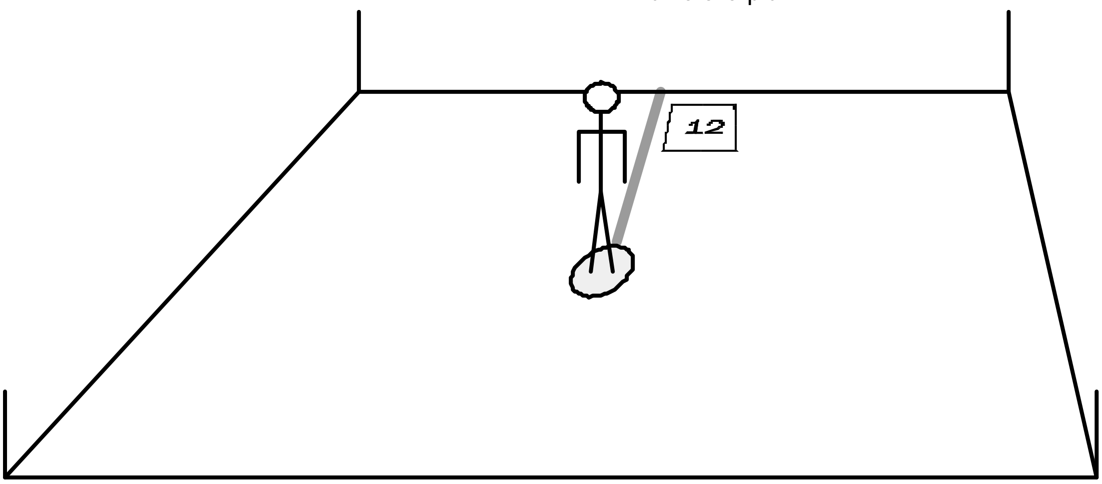


fig. 200

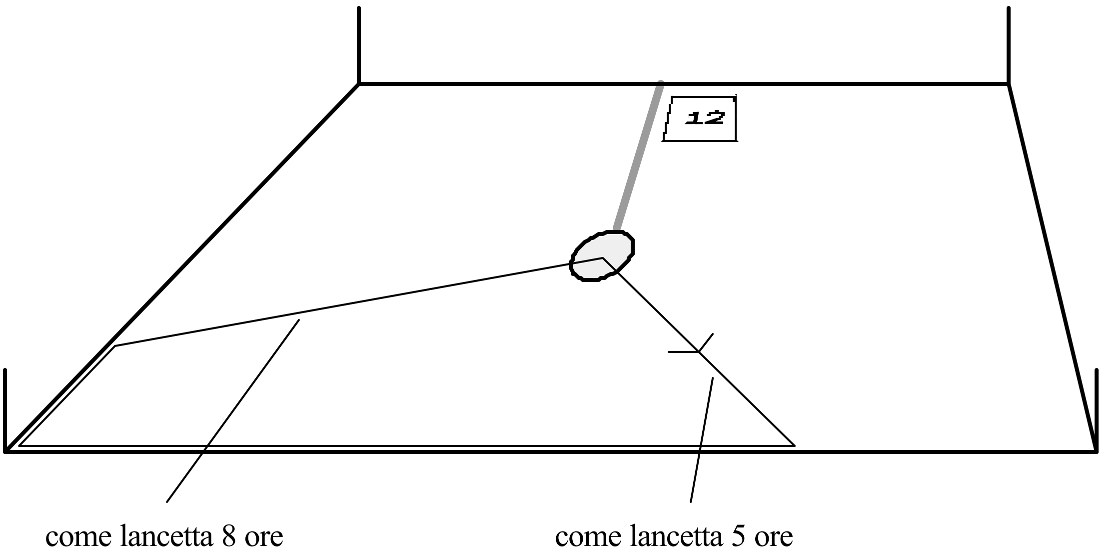


fig.201

L'ORA COME UNITA' DI MISURA DELLE AMPIEZZE ANGOLARI

Sulla parte non rotante della pedana, viene fissata una corona circolare, usando puntine da disegno o altro. Sulla corona circolare sono segnate le direzioni numerate dall'1 al 12 e l'indicatore posto sulla parte rotante individua una direzione. Il bambino, posizionato sulla piattaforma girevole, deve cambiare direzione da un'ora di partenza ad un'altra di arrivo.

ESEMPI:

- Posizionati con direzione ore 2 (posizione di partenza). Cambia direzione in modo da arrivare alla direzione ore 7. Di quante ore hai cambiato direzione?
- Dalla direzione ore 7, passa alla direzione ore 12. E' stato maggiore il primo cambiamento di direzione o il secondo?

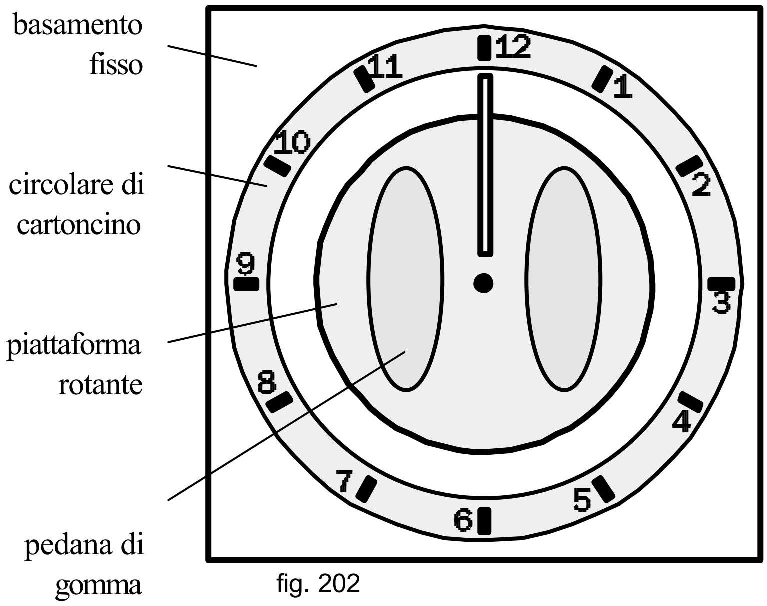


fig. 202

Altri esercizi sulle direzioni e sui cambiamenti di direzione possono avere come soggetto gli angoli interni dei poligoni.

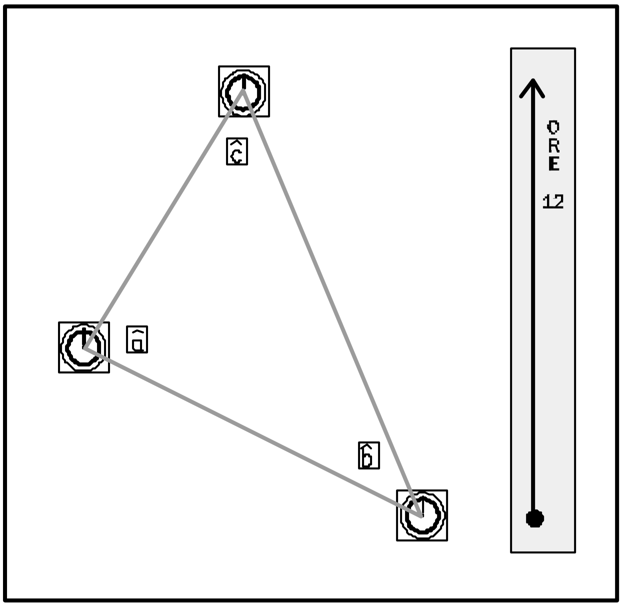


fig. 203

Sul "piano pavimento" viene posto un cartello con la freccia e la scritta della direzione ore 12, che servirà per orientare correttamente la pedana. Con corde si costruisce un triangolo.
Si dispongono cartelli con lettere alfabetiche per distinguere gli angoli interni del triangolo.
I bambini devono posizionare la pedana con il centro nel vertice di un angolo e con la direzione ore 12, come indicato dalla freccia.

Un bambino sale sulla pedana, la direziona su di un lato e legge tale direzione. Un altro bambino registra la direzione di partenza alla lavagna. La lavagna deve essere stata precedentemente predisposta con una tabella come la seguente:

Angoli interni del poligono	direzioni:		cambiamento di direzione
	partenza	arrivo	
$\hat{a}$	ore	ore	ore
$\hat{b}$	ore	ore	ore
$\hat{c}$	ore	ore	ore

Il primo bambino cambia la direzione facendo ruotare la pedana in modo da descrivere l'angolo **a** e legge la direzione di arrivo che viene registrata.
I bambini devono dire quanto misura l'angolo **a** facendo la differenza tra la direzione di arrivo e la direzione di partenza.

La stessa sequenza di operazioni si ripete per l'angolo **b** e per l'angolo **c**. Si supponga che alla fine della compilazione la tabella risulti:

Angoli interni del poligono	direzioni: partenza	arrivo	cambiamento di direzione
$\hat{a}$	ore 1	ore 4	ore 3
$\hat{b}$	ore 10	ore 11	ore 1
$\hat{c}$	ore 5	ore 7	ore 2

DOMANDE:
- Quale è l'angolo maggiore?
- Quale è l'angolo minore?
- Quanto risulta la somma di tutti e tre gli angoli?

N.B. L'insegnante deve usare l'accorgimento di formare con le corde angoli di ampiezza corri-spondente ad ore intere, onde evitare le posizioni intermedie (ad es. tra il 2 e il 3).

SEQUENZE DI CAMBIAMENTI DI DIREZIONE

Un quadrilatero costruito con corde sul pavimento ha gli angoli segnati con lettere alfabetiche.
Si dispone la pedana sul vertice dell'angolo **a** con la direzione ore 12 su un lato dell'angolo interno. Il bambino fa ruotare la pedana fino alla direzione indicata dall'altro lato.

Sulla pedana si pone un bollino adesivo per registrare la direzione di arrivo, che diventerà la direzione di partenza quando si misurerà l'angolo **b**. Nuovo cambiamento di direzione e nuova registrazione. Si prosegue fino a completare la misurazione dei quattro angoli del poligono.

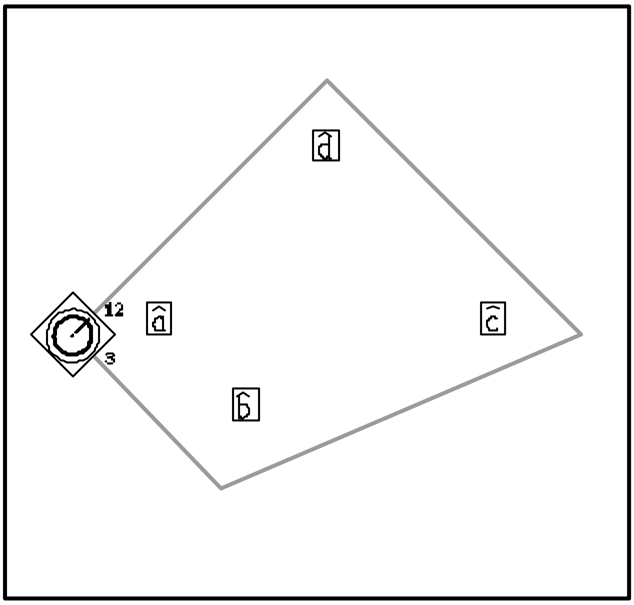


fig. 204

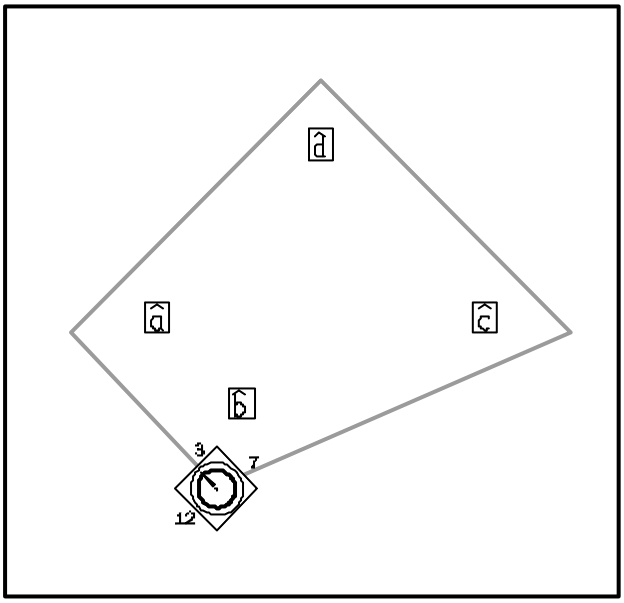


fig. 205

Alla fine sulla pedana si avrà una sequenza di bollini adesivi come quella segnata nella figura 206.

DOMANDE:

- Quanto misura ciascun angolo?
- Qual è l'angolo maggiore?
- L'indicatore di direzione da dove è partito?
- Dopo aver misurato i quattro angoli, l'indicatore dove è arrivato?
- Di quanto ha cambiato di direzione in tutto l'indicatore?
- Come si chiama l'angolo che corrisponde ad un cambiamento di direzione di 12 ore?

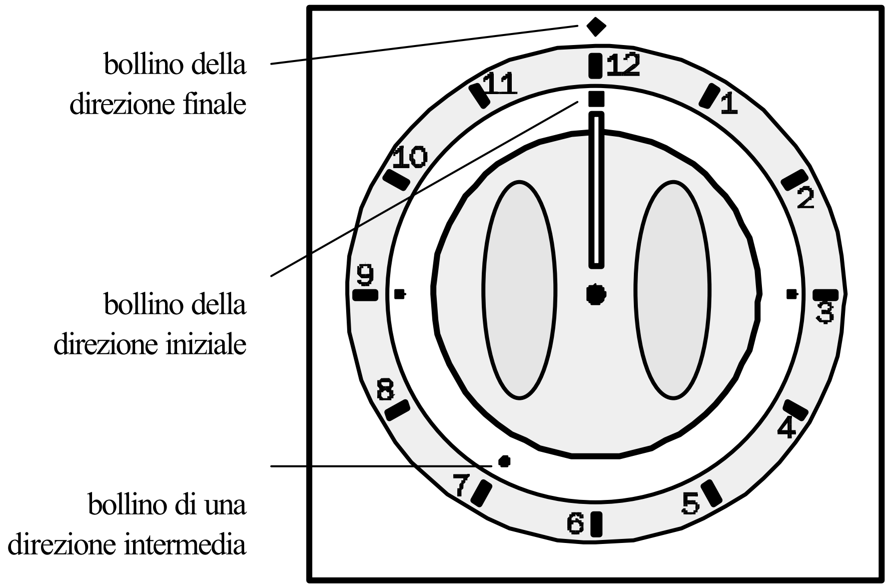


fig. 206

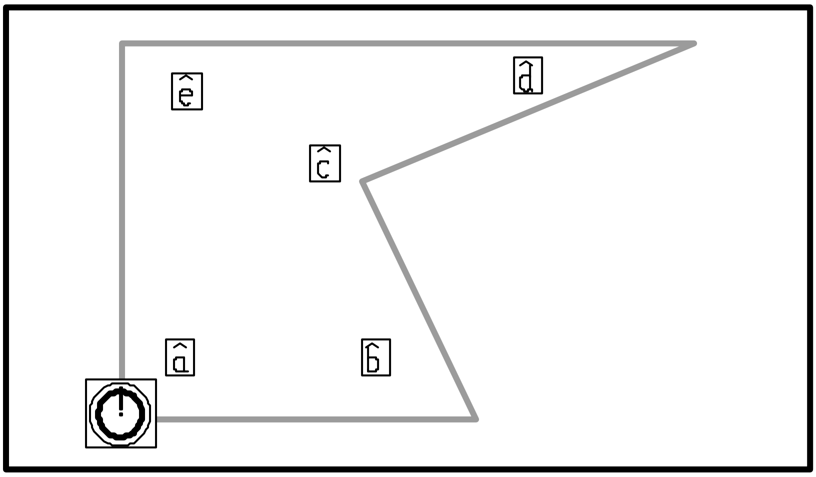


fig. 207

Un esercizio analogo al precedente viene proposto con un pentagono concavo. In questo caso la somma degli angoli interni supera l'angolo giro e alcune direzioni vengono assunte più di una volta (quelle che vanno dalle ore 12 alle ore 6), perciò è indispensabile segnare con colori diversi o forme diverse le direzioni assunte dopo il primo giro.

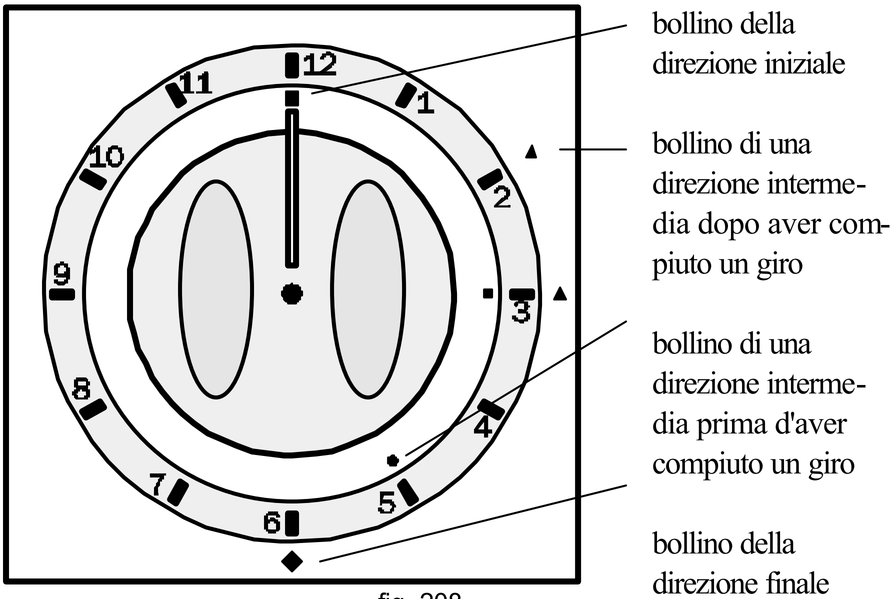


fig. 208

Alla fine dell'esercizio, nel caso della figura indicata, si ottiene una sequenza di bollini adesivi come quella rappresentata nella figura 208.

Angoli interni del poligono	direzioni:		cambiamento di direzione
	partenza	arrivo	
$\hat{a}$	ore 12	ore 3	ore 3
$\hat{b}$	ore 3	ore 5	ore 2
$\hat{c}$	ore 5	ore 2+1giro	ore 9
$\hat{d}$	ore 2	ore 3	ore 1
$\hat{e}$	ore 3	ore 6	ore 3

La tabella compilata sopra descrive tutte le fasi risultanti sulla piattaforma delle direzioni.
- Di quanto è il cambiamento di direzione totale?
- Di quanto hai superato l'angolo giro?

OSSERVAZIONE:*Gli esercizi eseguiti con la pedana sono necessari per permettere ai bambini di superare le difficoltà di orientamento ed arrivare alla metrica angolare.*

Altri sussidi più facilmente reperibili di quanto lo sia la pedana (non trovandosi in commercio è necessario farla costruire da un buon artigiano) sono:

- le piattaforme per reggere i televisori, vasi, ecc;
- un quadrato di legno con indicate le ore dell'orologio, dove il bambino, posizionato al centro, gira fa-cendo perno sui talloni;
- una mattonella di feltro paraffinata sulla parte inferiore sulla quale viene incollato un cartoncino dire-zionale. Mantenendo i piedi sul feltro, il bambino lo deve far ruotare con spinte di torsione.

Il goniometro con unità di misura le ore

Per procedere ad esercizi sul piano **manipolatorio** e su quello **grafico**, è utile costruire un goniometro con l'unità di misura uguale a 1 ora (cioè un goniometro che riproduce la pedana con 12 direzioni).

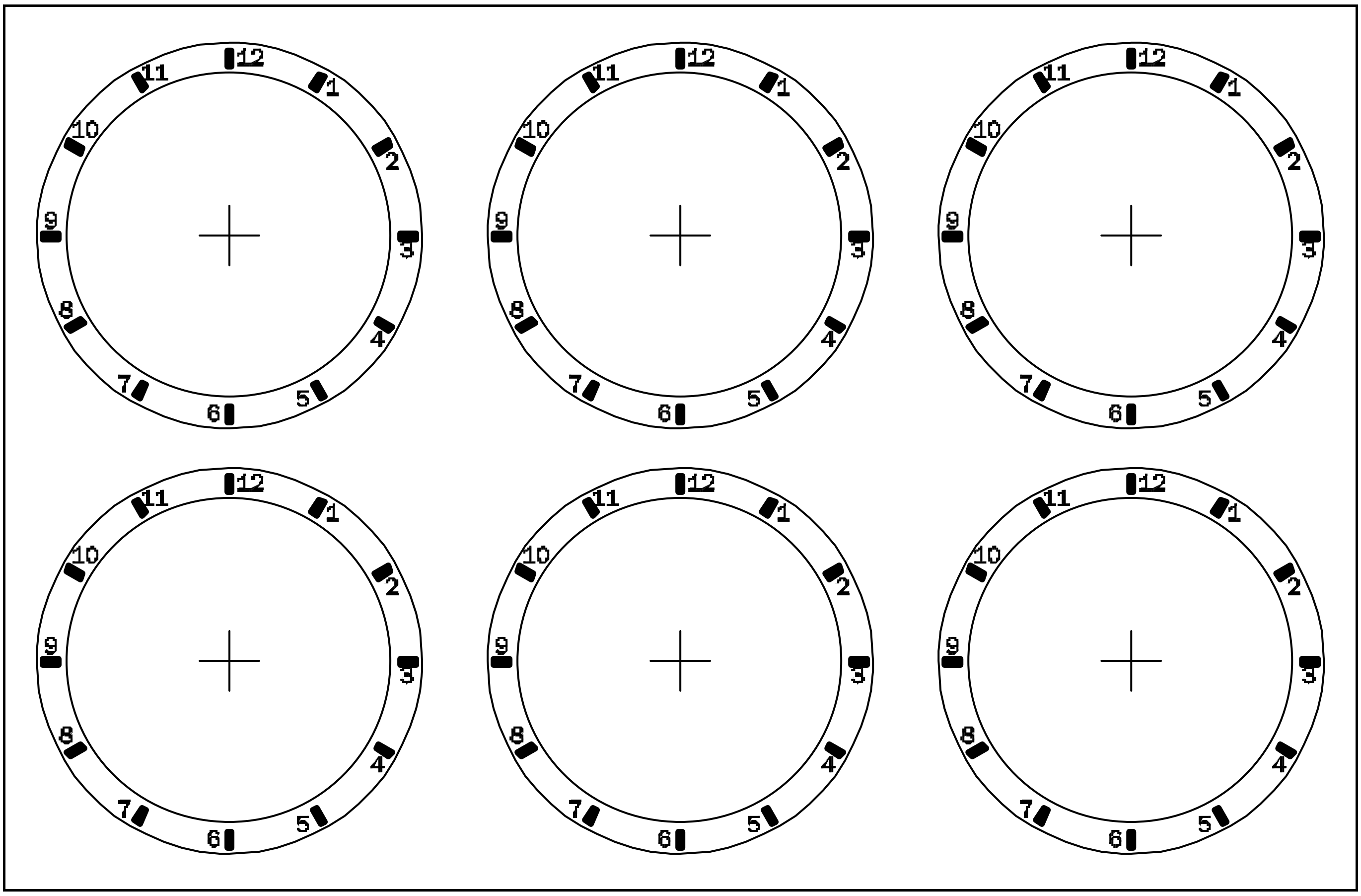


fig. 209

Su di un foglio formato A4 (usato normalmente per copie fotostatiche) si disegnano sei o due goniometri con evidenziati i centri, le 12 direzioni e i numeri associati ad esse. Si fotocopiano i goniometri disegnati su fogli di acetato (utilizzati per fotocopie per lucidi di lavagna luminosa) e si ritagliano.

ESERCIZIO:
Sul geopiano, con elastici, si costruiscono un poligono (avendo l'avvertenza che le direzioni dei lati siano sufficientemente corrispondenti alle direzioni delle ore dell'orologio), e una freccia che indica la direzione ore 12.
E' importante che la freccia indicante la direzione di riferimento sia sufficientemente lunga per evitare che il bambino la interpreti come indicatrice di un punto.

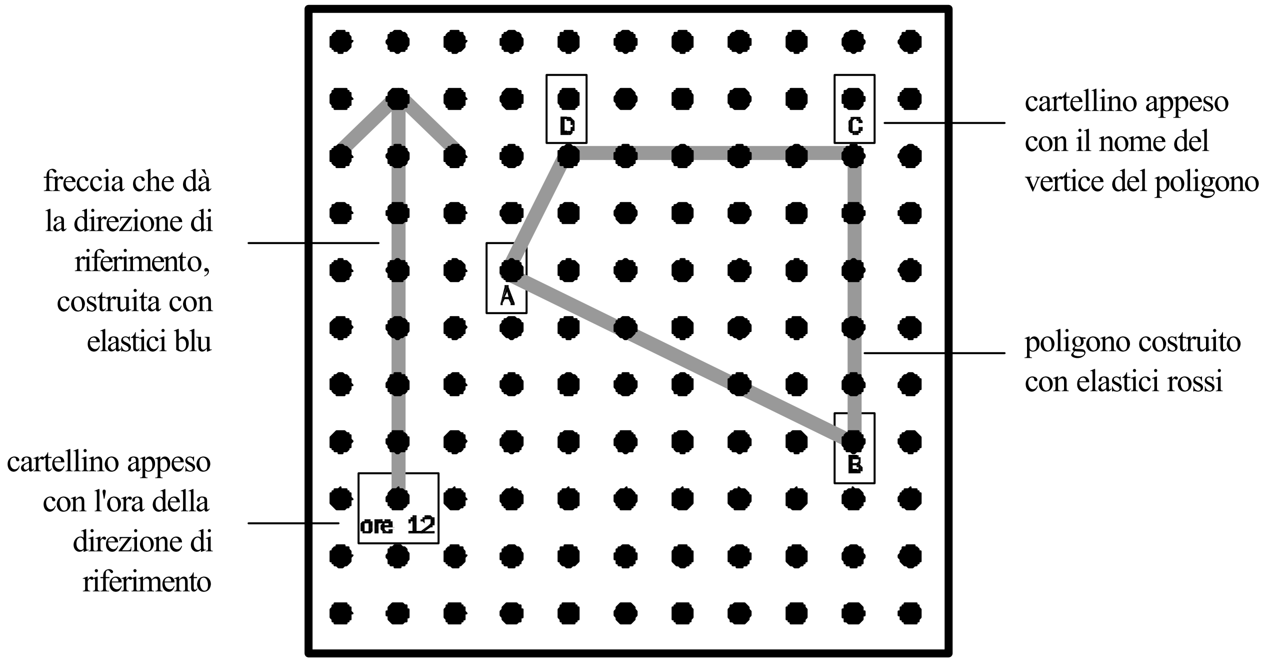


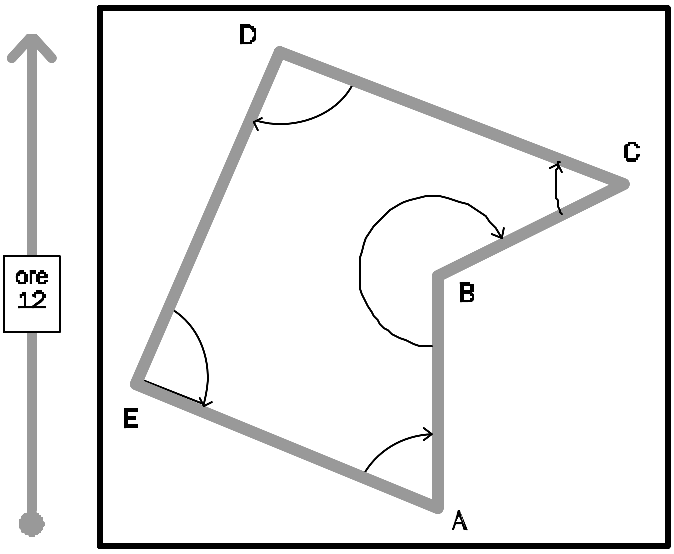
fig.210

Ai vertici del poligono si dispongono cartellini con lettere alfabetiche per individuare gli angoli. I bambini misurano gli angoli interni del poligono, utilizzando il goniometro trasparente direzionato con le ore 12 nella stessa direzione indicata dalla freccia, e registrano sul quaderno (o su di una scheda predisposta opportunamente) i valori delle direzioni di partenza e di arrivo e il relativo cambiamento di direzione.
Nel caso che il poligono sia quello della fig. 210 la tabella dovra comprendere i 4 angoli interni e i suggerimenti potranno essere dati relativamente ad un angolo:

Angoli interni del poligono	direzioni: partenza	arrivo	cambiamento di direzione
	ore	ore	ore
$\hat{B}$	ore 10	ore 12	ore 2
	ore	ore	ore
	ore	ore	ore

Analoghi esercizi si effettuano costruendo poligoni col gesso sulla lavagna, con il nastro adesivo colorato sui vetri delle finestre o sui banchi.

Altri si propongono su schede:



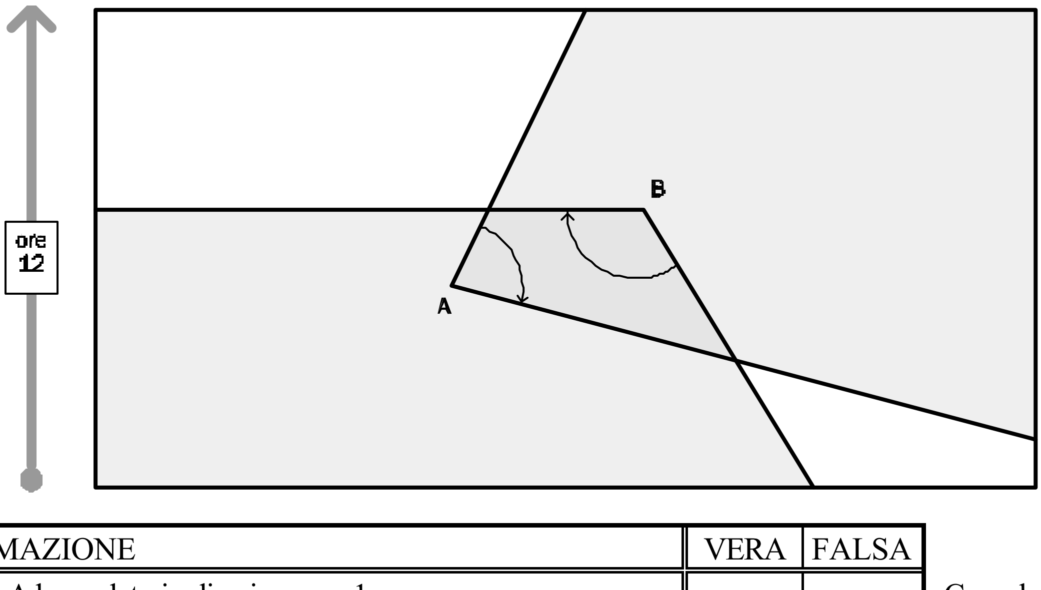
Con il goniometro direzionato secondo la freccia disegnata a fianco del piano, rileva le direzioni di partenza e di arrivo degli angoli interni del pentagono ABCDE.

Trova poi le ampiezze angolari calcolando quanto sono variate le direzioni.

angoli interni del pentagono	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$
direzione di partenza	ore	ore	ore	ore	ore
direzione di arrivo	ore	ore	ore	ore	ore
cambiamento di direzione o ampiezza angolare o misura dell'angolo	ore	ore	ore	ore	ore

Quanto risulta la somma di tutte le ampiezze angolari ? ______________________________

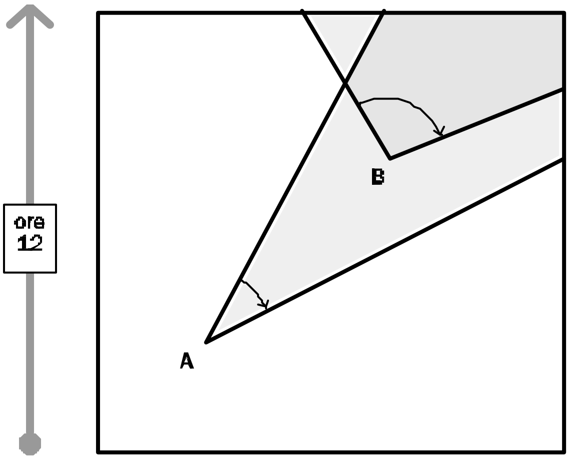
fig. 211



AFFERMAZIONE	VERA	FALSA
L'angolo A ha un lato in direzione ore 1		
L'angolo B ha un lato in direzione ore 3		
L'angolo A è più ampio dell'angolo B		
L'angolo A termina con la direzione ore 4		
L'angolo B termina con la direzione ore 5		

Completa la tabella tracciando crocette nelle caselle opportune.

fig. 212



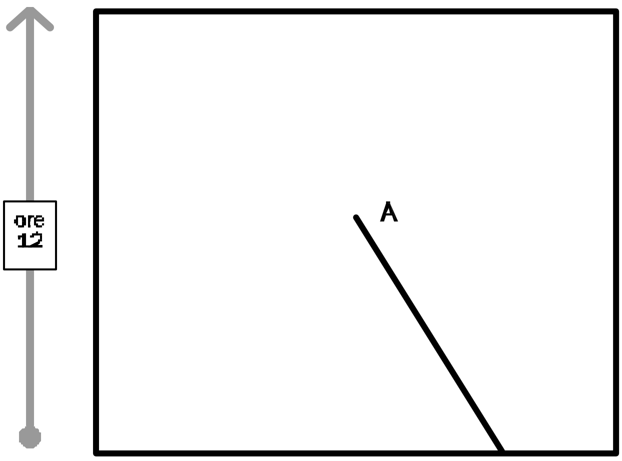
Tra i due angoli A e B quale è quel-lo di maggior ampiezza angolare ?

____

Spiega il perché :

____
____
____
____
____

fig. 213

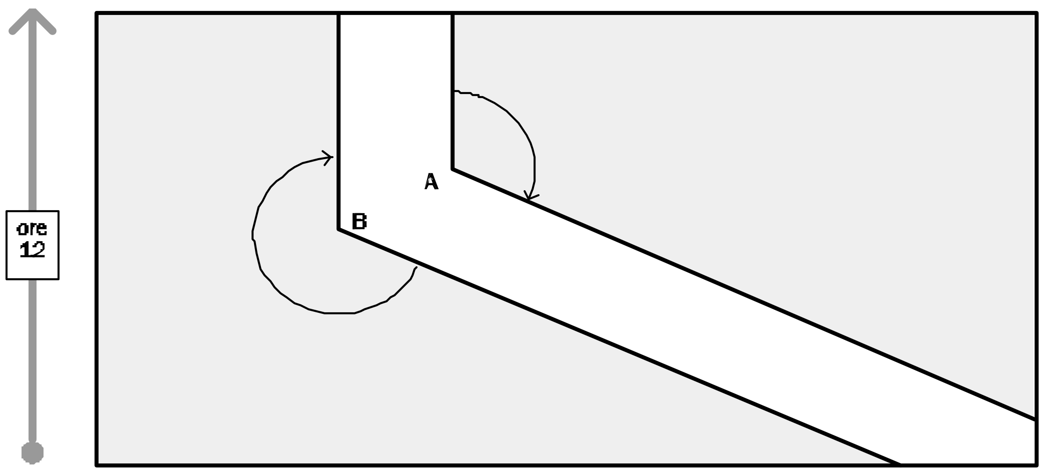


Nel piano è stata tracciata la semi-retta con origine in A ed è il 1° lato di un angolo di ampiezza *8 ore.*

Traccia anche l'altro lato e colora l'angolo di giallo.

Quale direzione ha l'altro lato dell'angolo ?________________

fig. 214



AFFERMAZIONE	VERA	FALSA
Gli angoli A e B hanno i lati nelle stesse direzione		
Le direzioni d'arrivo degli angoli A e B sono uguali		
L'angolo A è più ampio dell'angolo B		
A e B hanno lati nelle stesse direzioni quindi sono uguali		

Completa la tabella tracciando crocette nelle caselle opportune.

fig. 215

Percorsi grafici

Nei percorsi della frontiera dei poligoni, il cambiamento di direzione che si ha in un vertice NON E' L'ANGOLO COMPRESO FRA I DUE LATI che fanno capo al vertice, ma E' L'ANGOLO ESTERNO DEL POLIGONO:

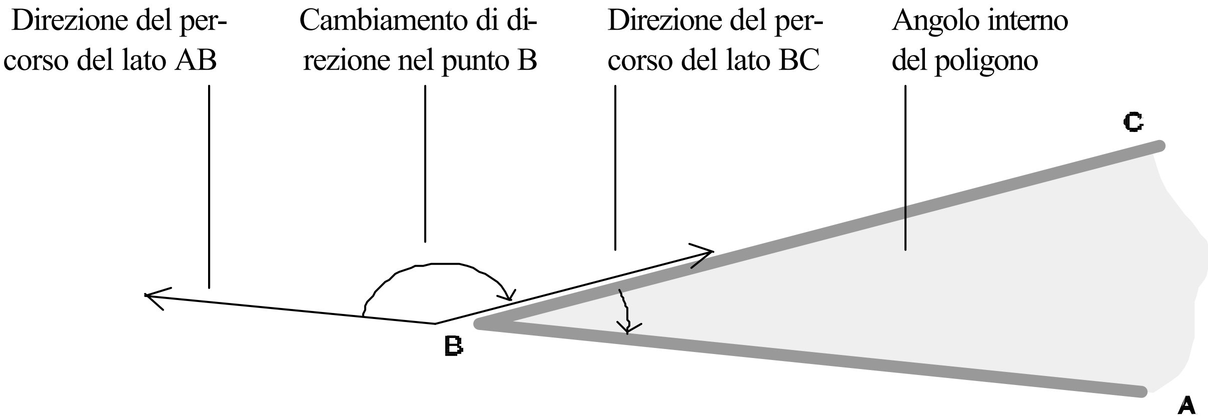
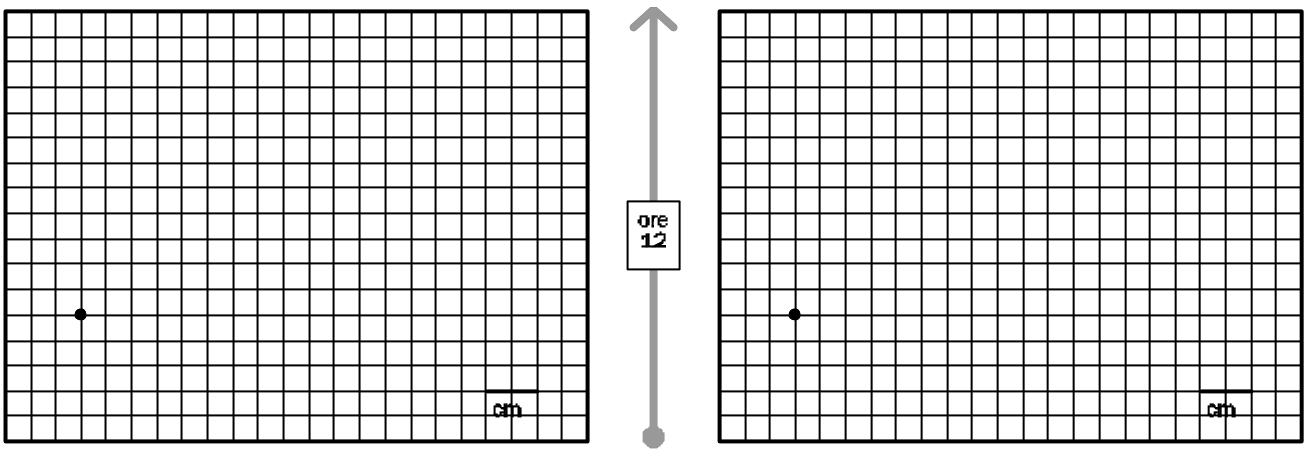


fig. 216



INIZIO → AD ore 12 → A cm 4 → CD ore 3 → A cm 8 → CD ore 3 → A cm 4 → AD ore 9 → A cm 8 → FINE

Sapendo che: AD... = Assumi la Direzione ore.....
CD... = Cambia la Direzione di ore .... ruotando in senso orario
A ... = Avanza di cm.....

e partendo dai punti predisposti, disegna, in ciascun piano, la figura che risulta seguendo le istruzioni date nei rispettivi diagrammi di flusso.

Hai ottenuto figure uguali o diverse ?

____

Come si chiamano le figure che hai ottenuto?

____

I punti di partenza coincidono con i punti di arrivo?

____

Di quanti cm è la lunghezza complessiva di ogni tracciato?

____

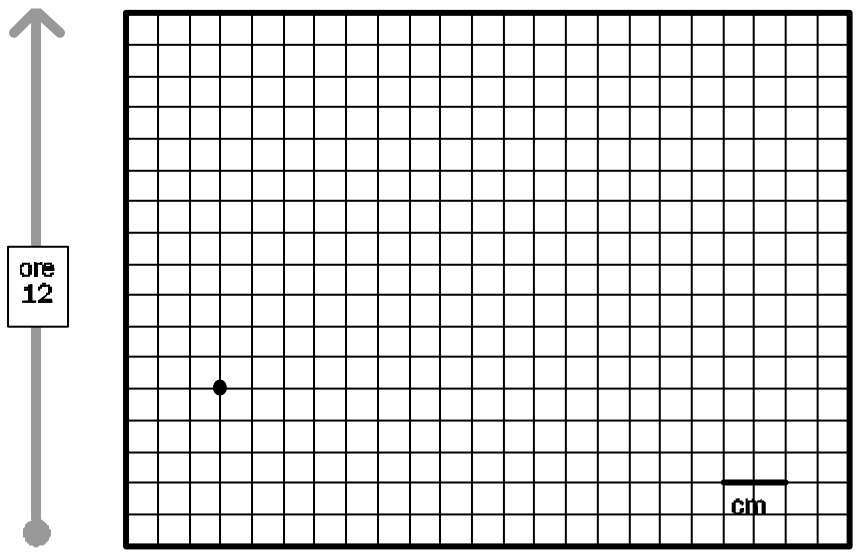
Dopo aver fatto un percorso di cm 16, di quante ore hai cambiato direzione nella prima figura?

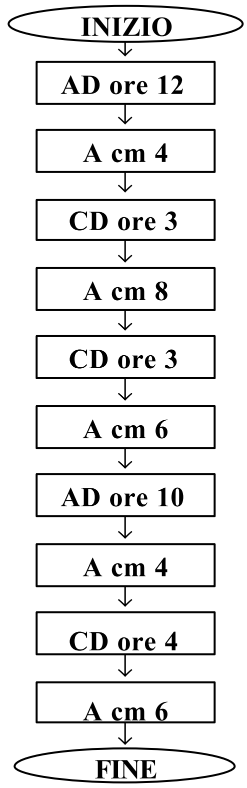
____

INIZIO → AD ore 3 → A cm 8 → CD ore 9 → A cm 4 → CD ore 9 → A cm 8 → AD ore 6 → A cm 4 → FINE

fig. 217

Nella seguente scheda si aggiungono difficoltà dovute a tracciati con obliquità e quindi con le misure che non sono più guidate dalla quadrettatura.





Legenda: AD... = Assumi la Direzione ore.....
CD... = Cambia la Direzione di ore .... ruotando in senso orario
A ... = Avanza di cm.....

Partendo dal punto disegnato nel piano quadrettato, traccia il percorso indicato nel diagramma di flusso. Per effettuare i cambiamenti di direzione o quando devi assumere una direzione, usa il goniometro orientandolo con le ore 12 come indicato dalla freccia.
Dopo aver completato la figura rispondi alle seguenti domande:

Il punto di partenza coincide con il punto di arrivo ? ______________________
Hai ottenuto una linea aperta o chiusa ? ______________________
La linea disegnata è semplice o intrecciata ? ______________________
Di quanti cm è la lunghezza complessiva del tracciato ? ______________________
Dopo aver fatto un percorso di 18 cm di quante ore hai cambiato direzione ? ____________
Sommando tutti i cambiamenti di direzione, di quante ore è cambiata la direzione dalla partenza all'arrivo ?
____

fig. 218

Nella scheda seguente interviene una nuova difficoltà relativa ad un nuovo blocco dei diagrammi di flusso. Si tratta di un blocco a forma di rombo con all'interno una domanda.
Le risposte a tale domanda sono poste in uscita dal blocco ed indicano due percorsi diversi. Come percorso si sceglie quello della risposta esatta. In tal modo alcuni comandi (quelli che si trovano nel giro che si ripete) si possono ripetere più volte. Occorre quindi prestare attenzione nel dare le risposte che riguardano quante volte i comandi si ripetono.

Una situazione di questo tipo in informatica è chiama-ta "LOOP" ed il blocco viene tradotto con la frase:
"SE ... ALLORA ... ALTRIMENTI ..."
e con l'ideogramma :

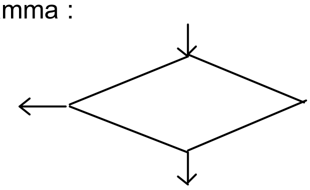
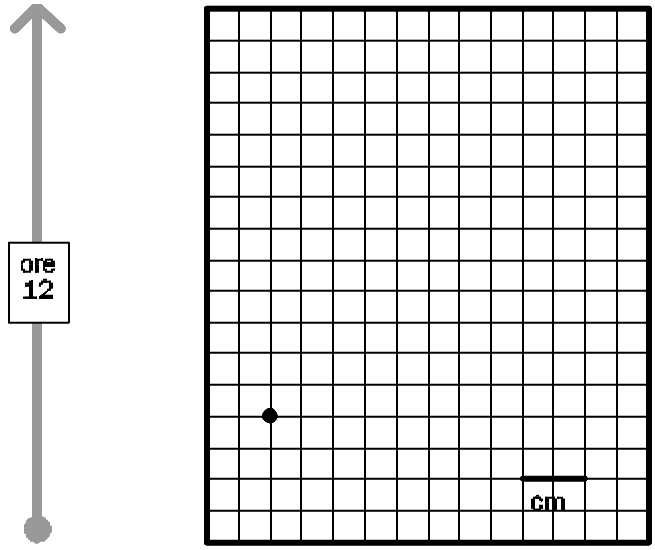
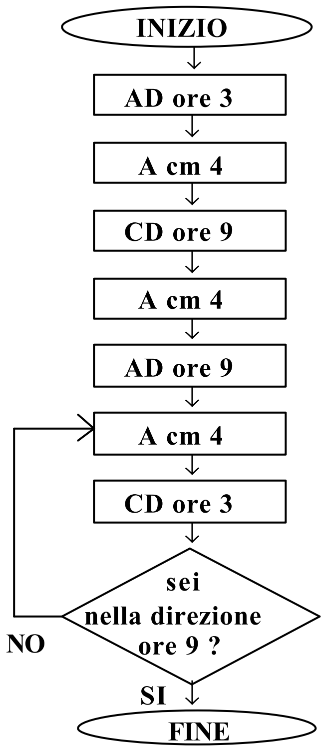


fig. 219





Legenda: AD... = Assumi la Direzione ore.....
CD... = Cambia la Direzione di ore .... ruotando in senso orario
A ... = Avanza di cm.....

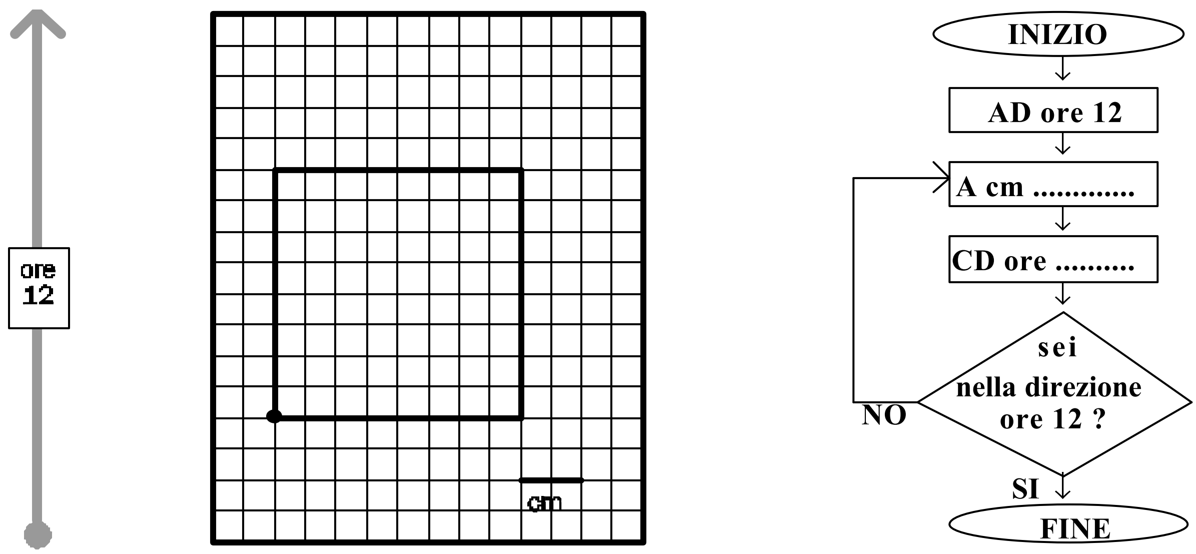
Partendo dal punto disegnato traccia il percorso indicato dal diagramma di flusso.

Quante volte è stato eseguito il comando "**A cm 4** " ? ____________________

Partenza e arrivo sono direzionati sulle stesse ore ? ____________________

Il tracciato è l'immagine di una cifra. Quale ? ____________________

fig. 220

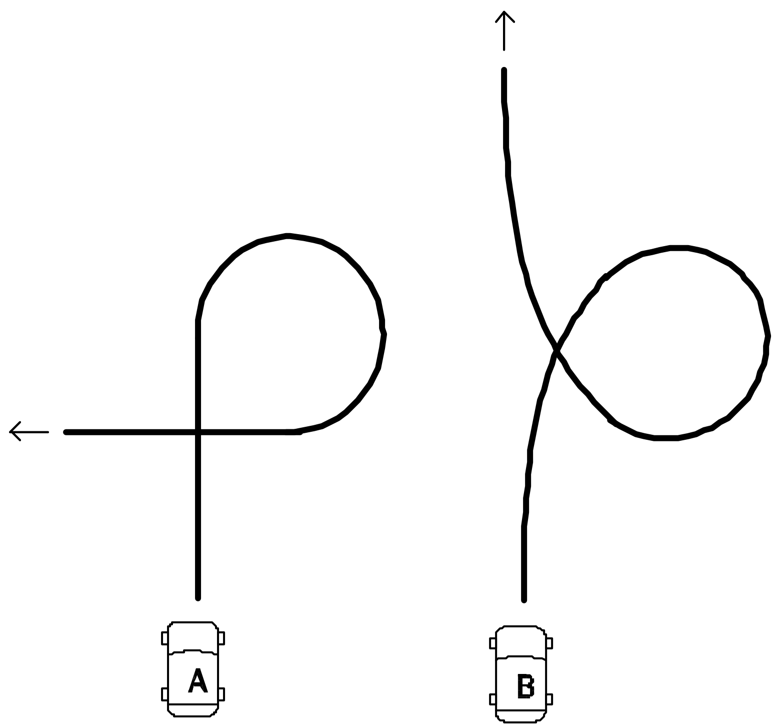


Completa il diagramma di flusso in modo che venga descritto il quadrato disegnato.

Quante volte è stato eseguito il comando "**CD ORE ....** " ? ____________________

Partenza e arrivo sono direzionati sulle stesse ore ? ____________________

fig. 221



Le due automobili A e B partono con direzione ore 12 e compiono i percorsi disegnati a fianco.

Quale automobile ha la direzione di arrivo uguale a quella di partenza ?

______

E' vero che l'automobile A cambia direzione di ore 3 ?

______

L'automobile B di quante ore cambia direzione ?

______

L'automobile A passa dalla direzione iniziale ore 12 alla direzione finale ore 9:

passa attraverso la direzione ore 4 ? ______

e attraversa la direzione ore 10 ? ______

fig. 222

IL MINUTO COME NUOVA UNITA' DI MISURA DELLE AMPIEZZE ANGOLARI

La necessità di poter esprimere angoli minori dell'angolo "ora" ed angoli del tipo "3 ore e qualcosa" *porta ad una unità di misura più piccola dell'ora*. Normalmente *i bambini*, già abituati a vedere le 12 direzioni relative alle ore sull'orologio *propongono le 60 direzioni dei minuti*, dove il cambiamento di direzione da un minuto al suo successivo diventa la nuova unità "ANGOLO MINUTO".

E' necessario adeguare i sussidi alla nuova metrica; quindi, dalla piattaforma, si toglierà la corona circolare delle 12 ore per sostituirla con quella dei 60 minuti. Il goniometro trasparente verrà sostituito con quello dei minuti (fig. 223).

Si propongono esperienze a livello corporeo con la piattaforma, in modo da trovare che:

- l'angolo piatto è di 30 minuti,
- l'angolo giro è di 60 minuti,

e altri esercizi sul geopiano e su schede.

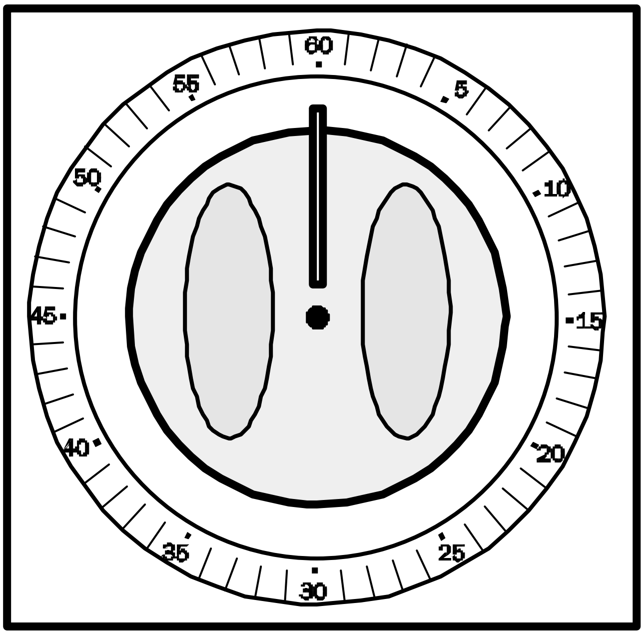
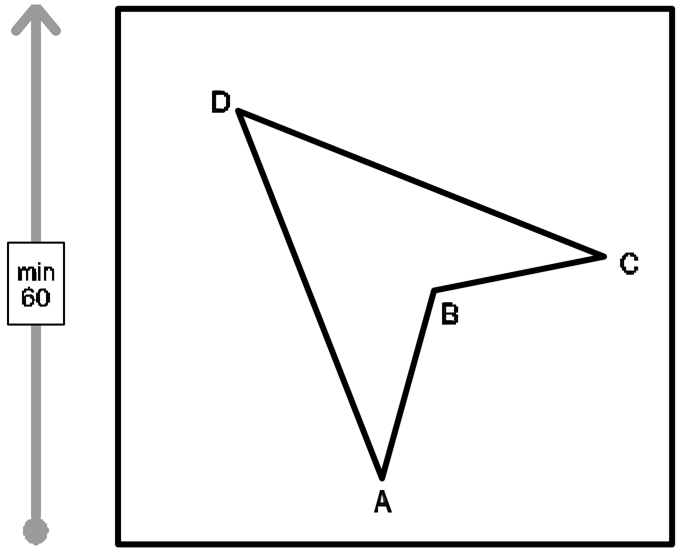


fig. 223

E' necessario ripetere alcuni degli esercizi proposti con la piattaforma delle ore, in modo da abituare il bambino alla maggior precisione della nuova unità di misura ed alle equivalenze fra i due sistemi di misura.



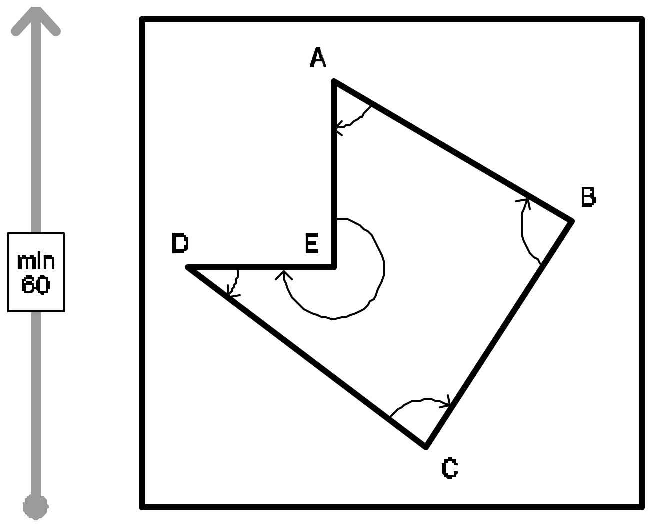
Segna con archi orientati in senso orario, vicini ai vertici, i 4 angoli interni del poli-gono. Misurali e completa la tabella. Quale dei 4 angoli è concavo ? ______

Prolunga i lati del quadrilatero in modo da evidenziare le due semirette dell'angolo concavo. Colora di giallo tale angolo.Il quadrilatero è interamente contenuto nell'angolo ? ______

Traccia di colore rosso le diagonali del quadrilatero. Quale è la diagonale con-tenuta nell'angolo concavo ? ______

ANGOLI	direz. partenza	direz. arrivo	misura dell'angolo
$\hat{A}$	min.	min.	min.
$\hat{B}$	min.	min.	min.
$\hat{C}$	min.	min.	min.
$\hat{D}$	min.	min.	min.

fig. 224



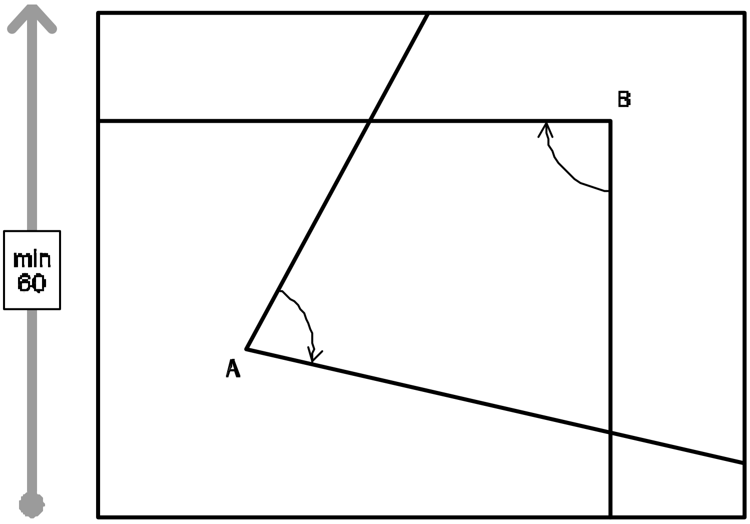
Misura gli angoli interni del pentagono ABCDE e completa la tabella.

Rispondi alle seguenti domande:
La somma degli angoli interni del pentagono concavo ABCDE è maggiore di un angolo giro ? ______
L'angolo E è la metà della somma degli angoli interni ? ______
La somma degli angoli interni A, B, C, D è uguale, maggiore o minore dell'angolo cancavo interno E ? ______
Quali angoli interni contengono intera-mente il poligono? ______

ANGOLO	MISURA
$\hat{A}$	min.
$\hat{B}$	min.
$\hat{C}$	min.
$\hat{D}$	min.
$\hat{E}$	min.
Somma ang. int.	min.

Immagina le semirette lati dell'angolo interno A. Questo an-golo contiene tutto il pentagono o solo una parte ? ______
Cosa è la parte del pentagono esterna all'angolo A? ______
Quale diagonale è esterna al pentagono ? ______
Quale diagonale attraversa la frontiera di ABCDE ? ______
La diagonale BE divide il pentagono in due poligoni. Che tipi di poligoni sono ? ______________ ______________

fig. 225



Dei due angoli A e B colora il minore di rosso e il maggiore di giallo.

Una parte di piano risulta di colore arancione. Come si chiama la figura colorata in tal modo ? ____________________

Chiama C e D gli altri due vertici della figura di colore arancione. Traccia i due archetti che indicano i rispettivi angoli interni.

Dei 4 angoli quanto misura l'angolo maggiore ? ____________________
E quello minore ? ____________________

Le parti di piano non colorate sono degli angoli. La loro misura è uguale a quella di due angoli interni della figura color arancione. Quali sono questi angoli interni ? ______________ ______________

fig. 226

UNITA' DI MISURA CONVENZIONALE DELLE AMPIEZZE ANGOLARI

E' opportuno passare alle convenzioni introducendo l'unità di misura "angolo grado sessagesimale" con le stesse modalità utilizzate precedentemente.
Sulla piattaforma si mette la corona circolare con 360 direzioni numerate. Le direzioni 0 e 360 sono coincidenti.

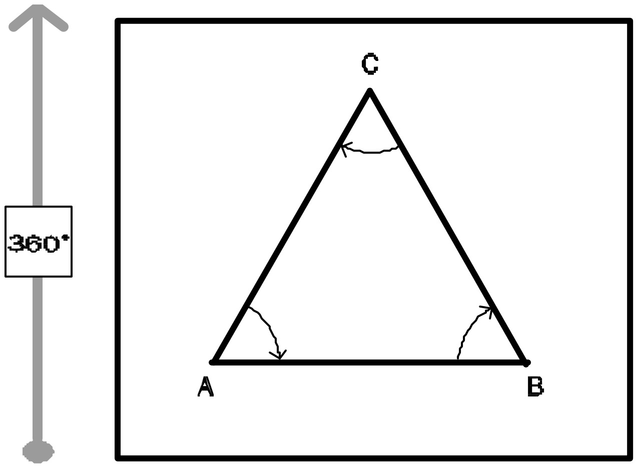
L'angolo grado sessagesimale risulta perciò il cambiamento da una direzione alla successiva delle 360 individuate.

Lo strumento manipolatorio è il comune goniometro. Si sconsigliano i goniometri che evidenziano le 180 direzioni dell'angolo piatto (i mezzi goniometri) ed anche i goniometri (usati dai geometri) che riportano contemporaneamente alle 360 direzioni sessagesimali, le 400 direzioni centesimali (l'angolo retto è di 100 gradi).
Si ripetono esercizi analoghi a quelli precedentemente proposti, lavorando con la piattaforma e con il goniometro sessagesimali.
Si scoprirà così che l'angolo giro è di 360°, il piatto di 180°, il retto di 90° ecc.; che gli angoli concavi sono maggiori di 180° e quelli convessi arrivano ad un massimo di 180°.

Gli angoli vengono indicati, normalmente, usando te lettere sormontate dal simbolo grafico dell'angolo:

$$\widehat{ABC}$$

angolo di vertice B che si ottiene passando dalla direzione BA alla direzione BC.
Sarà perciò opportuno incominciare ad abituare il bambino a questo nuovo modo per indicare gli angoli interni di un poligono ottenendo, così, una maggiore consapevolezza dell'angolo come cambiamento di direzione.



Misura i lati e gli angoli interni del triangolo:

$\overline{AB}$ = cm _______ **$\widehat{BAC}$ = ______°**
$\overline{AC}$ = cm _______ **$\widehat{CBA}$ = ______°**
$\overline{BC}$ = cm _______ **$\widehat{ACB}$ = ______°**

Il triangolo è equilatero (ha tutti i lati uguali)
e equiangolo (ha tutti gli angoli uguali) ? ____

Trova e indica con M il punto medio del lato AB. Traccia il segmento MC.

L'angolo interno con vertice in C è stato diviso in due parti:
Quale è la misura di ciascuna delle due parti ? ____

____

Dalla direzione AM alla direzione MC di quanti gradi si cambia ? __________________________
Dalla direzione AB alla direzione BC si cambia direzione di 120° ? _________________________
Quale è la direzione che si assume andando da C a A ? ________________________________

fig. 227

Al bambino viene consegnato un foglio di carta di forma rettangolare che dovrà essere piegato lungo le diagonali. Il foglio con le piegature verrà incollato aperto sulla seguente scheda che il bambino completerà.

Incolla il foglio rettangolare nel piano in modo che risulti un rettangolo.
Indica con A,B,C,D i vertici del rettangolo e con M il punto di intersezione delle piegature.

Effettua e riporta le seguenti misure angolari:
$\widehat{DMC}$ = _____° **$\widehat{AMD}$ = ____**

La somma dei due angoli misurati è come un angolo piatto ? ____________________________

Le ampiezze degli angoli $\widehat{MAB}$, $\widehat{MDC}$ sono uguali o diverse ? ______________________
Di quanto è il cambiamento di direzione da MC a MD (in senso orario) ? __________________
La lunghezza di MB è la metà della lunghezza di AC ? ______________________________
Il triangolo ABC è isoscele ? ___________________ e il triangolo AMD ? __________________
Colora di rosso il triangolo ABC e di giallo il triangolo ABD.
I triangoli "bianco" e "arancione" sono uguali ? ____

fig. 229

BISETTRICE DI UN ANGOLO

Bisettrice: *semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due angoli aventi pari ampiezza.*

Tra le figure legate agli angoli, quella della semiretta bisettrice è una delle più importanti perché permette di ottenere angoli particolari e di percepire la metrica degli stessi anche sotto forma duale.
Se si prende come unità l'angolo giro, attraverso l'uso delle bisezioni fatte con le bisettrici si ottengono successivamente il mezzo giro (angolo piatto), il quarto di giro (angolo retto), l'ottavo di giro (angolo di 45°), ecc.

Tradizionalmente le semirette bisettrici si trovano con costruzioni geometriche realizzate con riga e compasso. Per il bambino però tali metodi, che presuppongono conoscenze di proprietà euclidee delle figure, risultano per il momento prematuri; pertanto si propone l'uso diretto del goniometro. Si rimanda l'uso del metodo geometrico successivamente alla scoperta delle proprietà delle figure.

ESEMPI:

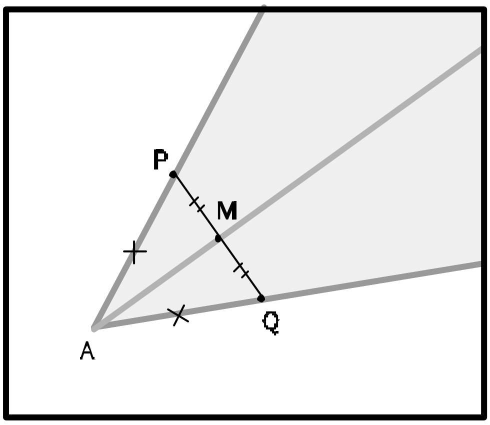


fig. 230

Puntando in A, con il compasso si segnano sui lati dell'angolo i punti P e Q. Mantenendo la stessa apertura, si punta in P e si traccia un arco e poi si punta in Q e si traccia un secondo arco intersecante il primo nel punto R. La semiretta con origine in A che passa per R è la bisettrice perché il quadrilatero APRQ è un rombo e, fra le sue proprietà, la diagonale divide gli angoli al vertice in parti uguali.

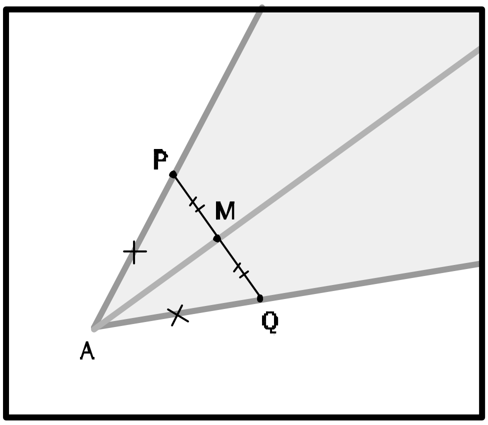


fig. 231

Sui due lati vengono segnati due segmenti AP ed AQ della stessa lunghezza. Si congiunge P con Q e si trova, metricamente, il suo punto medio M.
La semiretta uscente da A e passante per M è la bisettrice perché, nel triangolo isoscele APQ, la mediana AM è anche bisettrice.

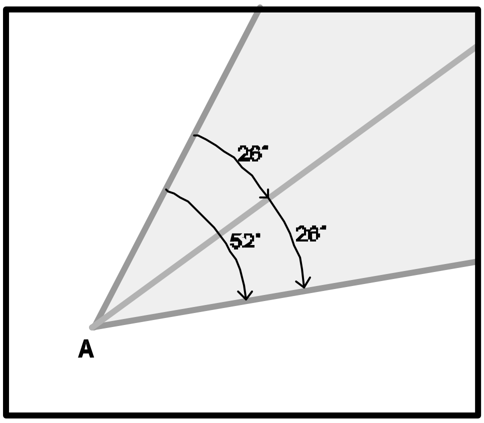
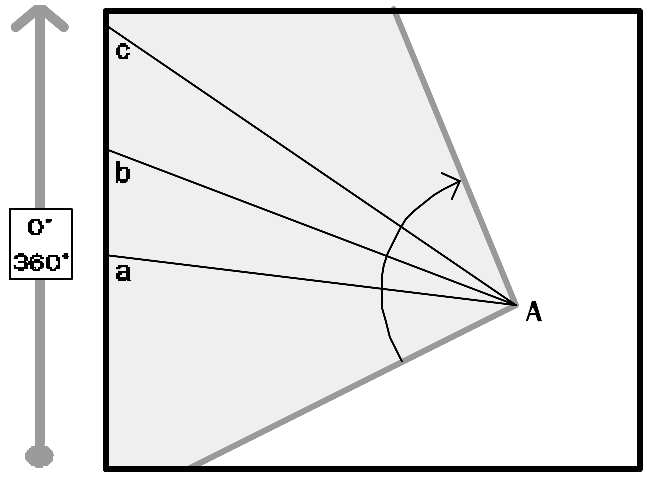


fig. 232

Con il goniometro si misura l'ampiezza angolare; aritmeticamente si divide per due e si riporta, sempre con il goniometro, l'angolo dimezzato.

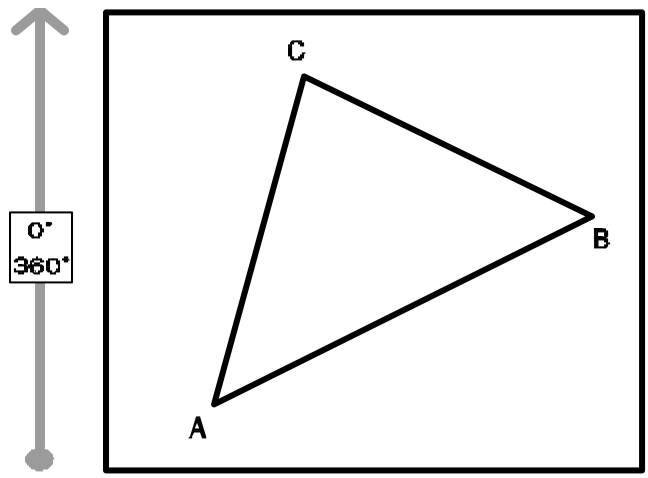


Usando il goniometro sessagesimale orientato come indicato dalla freccia, dai le risposte alle seguenti domande riguardanti l'angolo A:

Direzione di partenza ? ________________
Direzione d'arrivo ? __________________
Quanto è ampio ? ____________________

Quale delle tre semirette **a**, **b**, **c** è la bisettrice dell'angolo ? _________________________
Direzione della bisettrice ? _____________

fig. 233

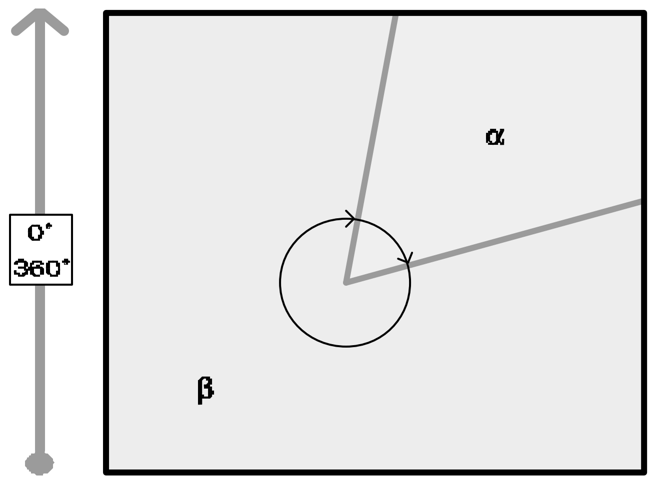


Traccia con il rosso le due semirette che delimitano l'angolo interno A del triangolo ABC. Traccia con il colore rosso la sua bisettrice. Ripeti, usando il colore blu, lo stesso lavoro per l'angolo interno B e analogamente, con il colore verde, per l'angolo C.

E' vero che le bisettrici si intersecano tutte in uno stesso punto ? ____________________

Il punto di incontro delle bisettrici di un triangolo si chiama INCENTRO.

fig. 234

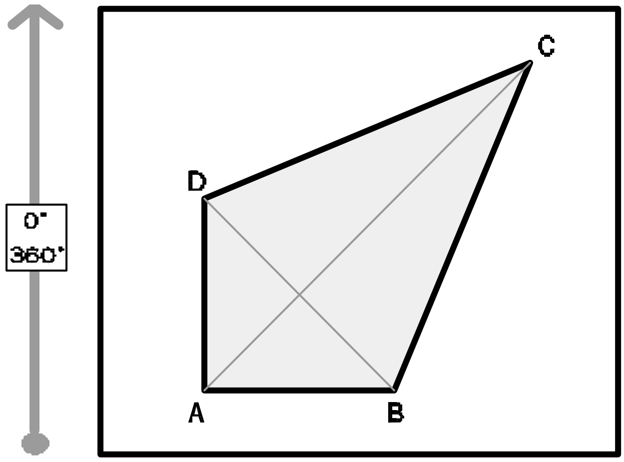


Tra i due angoli α e β quale è quello di ampiezza maggiore ? _____________________

Traccia la bisettrice dell'angolo α.
Quale è la sua direzione ? ______________
Traccia la bisettrice dell'angolo β.
Quale è la sua direzione ? ______________

Le due bisettrici, viste insieme, formano una retta ? ____________________________
Quanto è ampio l'angolo che ha per lati le due bisettrici ? ___________________________

fig. 235

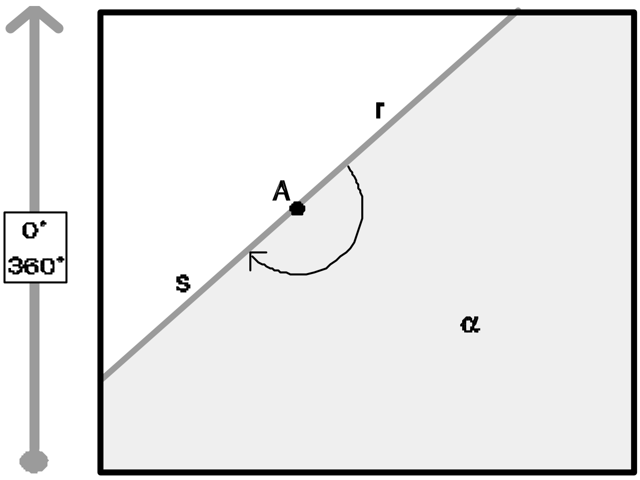


Il quadrilatero ABCD (a forma di aquilone) ha le due diagonali che dividono gli angoli interni in due parti.
Quale delle due diagonali è bisettrice degli angoli interni ? ______________________

Indica con H l'intersezione delle diagonali.
Gli angoli con vertice in H hanno tutti la stessa ampiezza ? ___________________
Ampiezza di ciascuno di questi angoli ? ___
Quale è la diagonale che divide il quadrilatero in due triangoli isosceli ? _______________

fig. 236

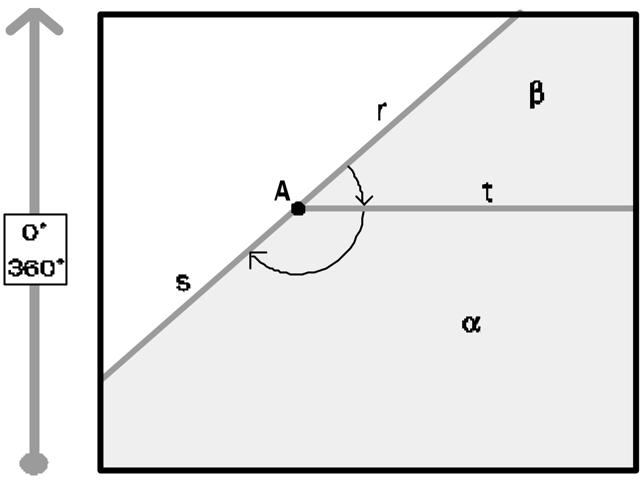
CLASSIFICAZIONE DEGLI ANGOLI



Le semirette r, s hanno l'origine in comune nel vertice A e appartengono alla stessa retta.
L'angolo α che viene descritto cambiando direzione da r ad s si chiama ANGOLO PIATTO.
Quanto è ampio ? ___________________

Traccia la sua bisettrice e chiamala con b.
Ciascuno dei due angoli che si sono ottenuti tracciando la bisettrice viene chiamato ANGOLO RETTO.
Esprime l'ampiezza dell'angolo retto ottenuto cambiando direzione da r a b : _________

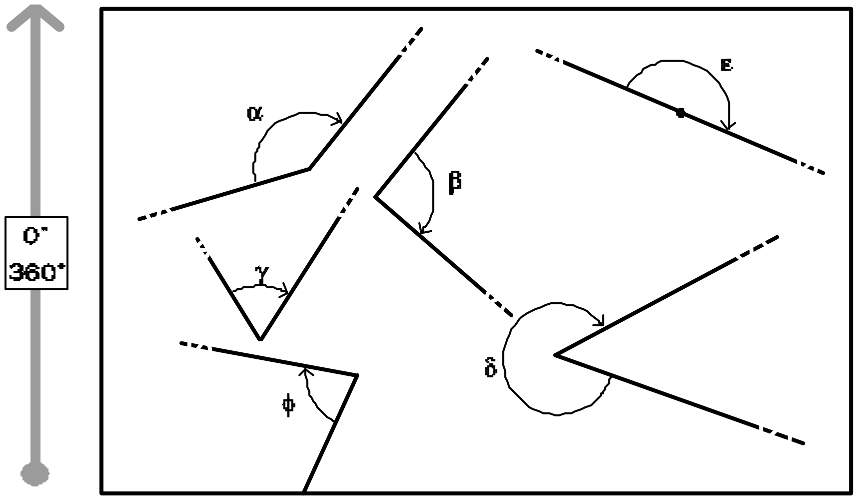
fig. 237



Unendo α e β si ottiene un angolo piatto.
Traccia la sua bisettrice e chiamala b. Si ottengono due angoli retti.
β è minore dell'angolo retto ? __________
Se un angolo è minore di un angolo retto viene detto ANGOLO ACUTO.

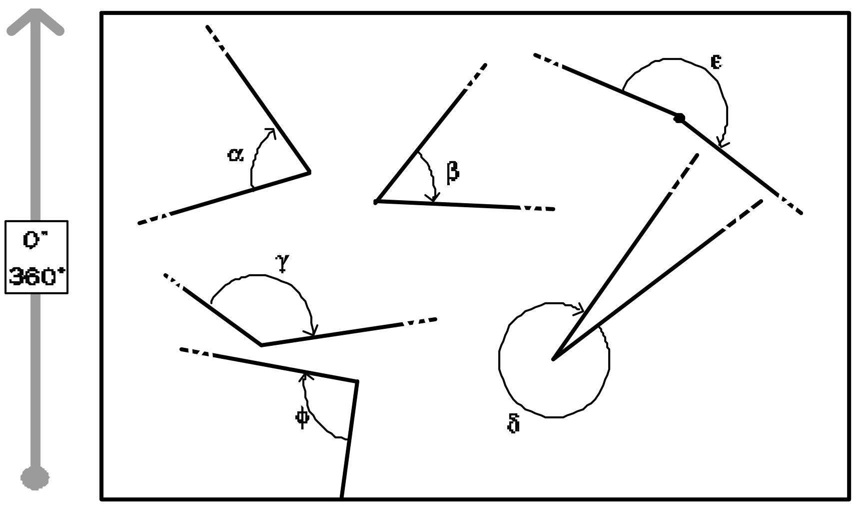
α è maggiore dell'angolo retto ? _________
Se un angolo è maggiore dell'angolo retto e minore dell'angolo piatto viene detto ANGO-LO OTTUSO.

fig. 238



Le linee tracciate che terminano con un tratteggio stanno a indicare le corrispondenti semirette. Il tratteggio significa che devono proseguire fino al confine del piano.
Questo modo per tracciare le semirette, oltre ad essere comodo, è utile per non fa-re confusione quando gli angoli da tracciare sono molti.
Completa la tabella:

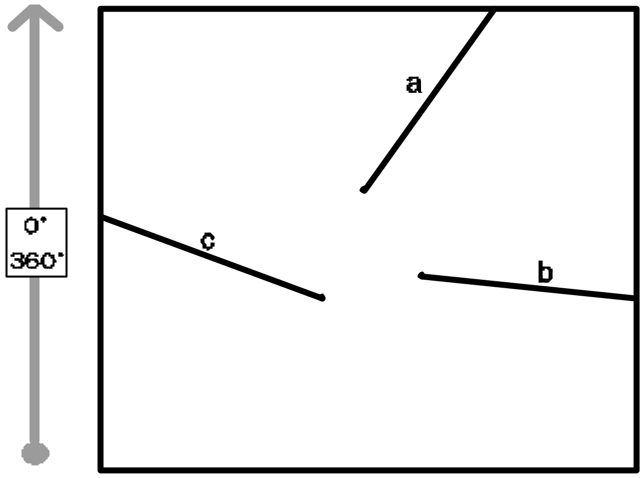
ANGOLO	MISURA	CONFRONTO CON GLI ANGOLI RETTO			CONFRONTO CON GLI ANGOLI PIATTO			TIPO DI ANGOLO
		<	=	>	<	=	>	
α								
β	95			x	x			ottuso
γ								
δ								
ε								
ϕ								



A fianco è stata disegnata una nuova serie di angoli. Completa la tabella sottostante riferendoti ai nuovi angoli:

ANGOLO	MISURA	CONFRONTO CON GLI ANGOLI RETTO			CONFRONTO CON GLI ANGOLI PIATTO			TIPO DI ANGOLO
		<	=	>	<	=	>	
α								
β								
γ								
δ								
ε								
ϕ								

fig. 239



Traccia:
un angolo acuto che abbia un lato nella semi-retta a.
un angolo retto che abbia un lato nella semi-retta b.
un angolo ottuso che abbia un lato nella semi-retta c.

Colora di giallo tutto il piano tranne l'angolo ottuso.
La parte di piano gialla è un angolo ? _____
E' minore o maggiore di un angolo piatto?
____

Gli angoli maggiori dell'angolo piatto e minori dell'angolo giro rientrano nella categoria degli ANGOLI CONCAVI;

mentre se sono minori o uguali all'angolo piatto rientrano nella categoria degli ANGOLI CONVESSI.

L'angolo giallo è concavo o convesso ? ____________________________
L'angolo ottuso è concavo o convesso ? ____________________________
Può un angolo retto essere concavo ? ____________________________

fig. 240

Riassumendo:

ANGOLI DEL PIANO

- CONVESSI (>= angolo nullo e <= angolo piatto)
  - NULLI
  - ACUTI (>= angolo nullo e <angolo retto)
  - RETTI
  - OTTUSI (>angolo retto e <angolo piatto)
  - PIATTI
- CONCAVI (>angolo piatto e <angolo giro)

CASO PARTICOLARE:
L'ANGOLO PIATTO è CONVESSO pur essendo maggiore dell'angolo piatto. Questo perchè, ricordando la definizione di convessità, non esiste un segmento con gli estremi nell'angolo che fuoriesca dallo stesso.

13.
PARALLELISMO FRA RETTILINEE

RETTE PARALLELE

In ogni geometria, il parallelismo fra rette è così definito:

> **"Due rette complanari sono parallele se non hanno punti in comune."**

Questo porta nei piani finiti a delle complicazioni e a delle apparenti contraddizioni con ciò che è lo sviluppo del parallelismo nella geometria euclidea, infatti, nella figura qui rappresentata, le rette **a** e **b**, non avendo punti in comune, sono parallele.
E' evidente che il parallelismo fra rette, in tali casi, dipende anche dal piano dove sono contestualizzate.
E' sufficiente allargare il piano per vedere come le stesse rette, in un piano diverso, non sono più parallele.

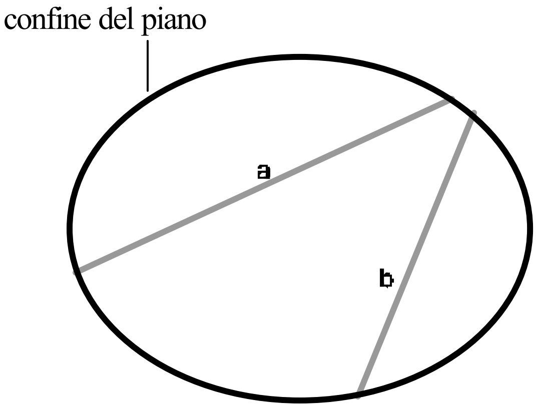


fig. 241

Le rette **a** e **b**, parallele nel piano a , diventano incidenti nel piano b (fig. 242). Tale situazione non può essere proposta al bambino. Il bambino è sicura-mente portato a vedere nelle rette disegnate nella fig. 241 una situazione di convergenza. Associare questa impressione al parallelismo è pericoloso per lo svi-luppo successivo della geometria euclidea dove il parallelismo è considerato antitetico alla conver-genza.

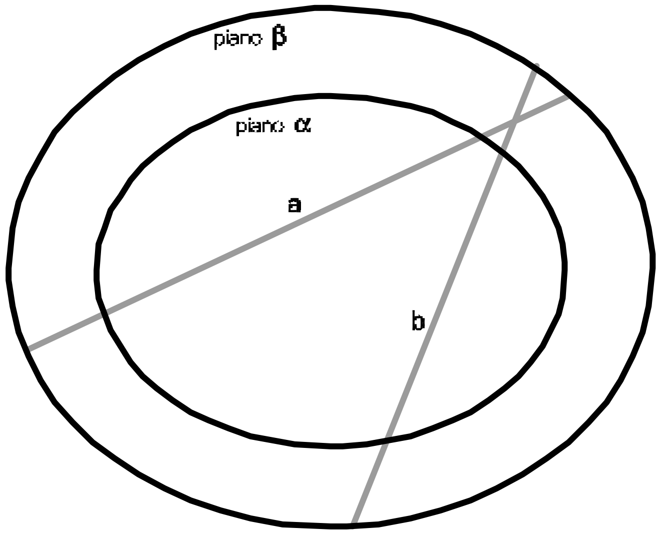


fig. 242

Le due figure sottostanti rappresentano la stessa retta nello stesso piano. Si nota come una retta può essere interpretata con due versi di percorrenza uno opposto all'altro e quindi, nel caso specifico, la retta può essere associata sia alla direzione 55°, sia alla direzione 235°.

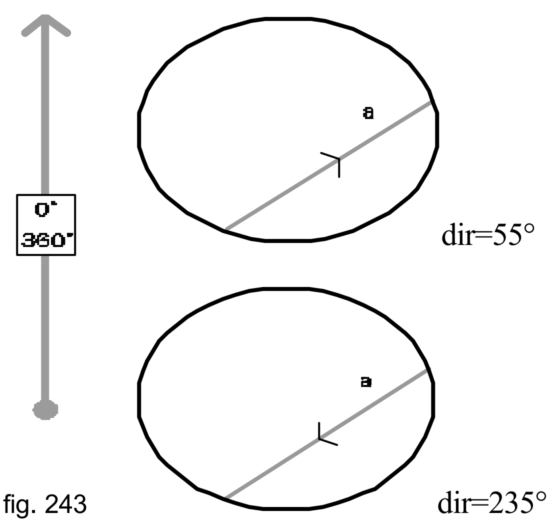


fig. 243

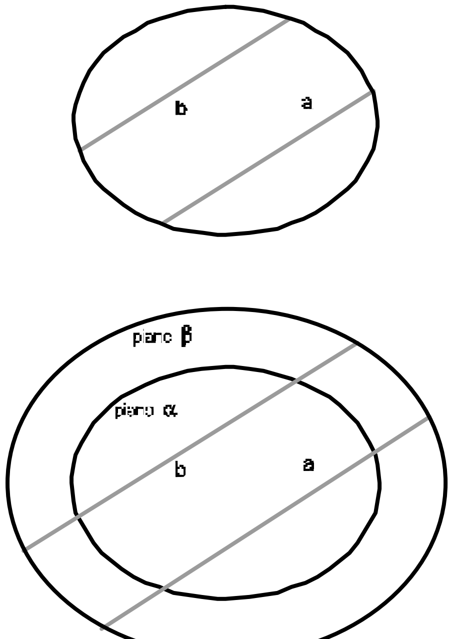


fig. 244

Vediamo ora il caso di due rette aventi la stessa direzione e collocate in un piano finito.

Nel piano a le rette **a** e **b** hanno uguali direzioni ed inoltre risultano parallele (non hanno punti in comune).

Se il piano a viene ampliato e diventa il piano b , le due rette **a** e **b** conservano il parallelismo, costante questa che si conserverà anche allargando il piano in misura illimitata (come il piano della geometria euclidea).
Pertanto, per evitare che il bambino incontri contraddizioni passando da un piano limitato ad uno illimitato, si assumerà come concetto di parallelismo fra rette il seguente:

> ***DUE RETTE*** *complanari* ***SONO PARALLELE*** *se hanno la stessa direzione, o direzioni opposte, e sono distinte.*

N.B. Come già detto, alla definizione di direzione si intende associato anche il verso.

ESERCIZI

1° percorso 2° percorso

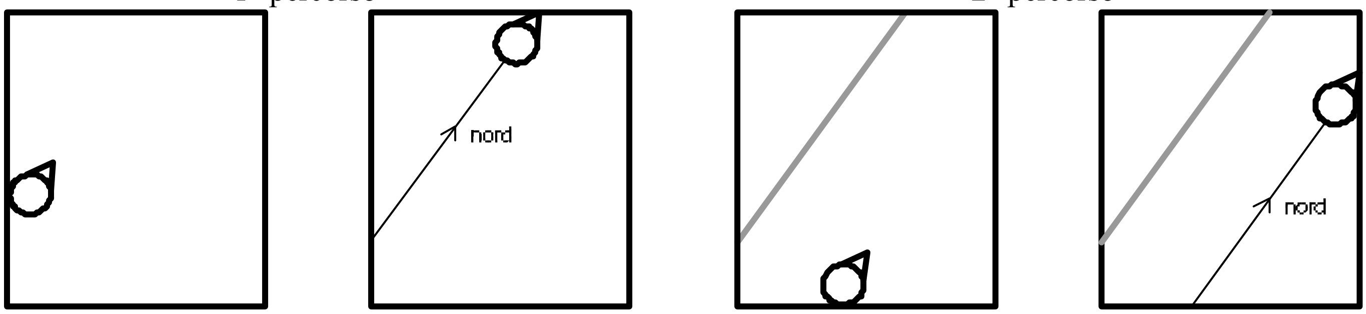


fig. 245

Un bambino con in mano una bussola compie un percorso seguendo la direzione NORD indicata dall'ago magnetico (fig. 245). Alla fine il percorso viene visualizzato con una corda che, sul piano pavimento, rappresenta una retta.
Lo stesso bambino, partendo da un altro punto di confine, esegue un altro percorso, sempre in direzione NORD. Anche questo percorso viene visualizzato con una corda.
Si osservano poi i due percorsi e si rileverà che:
- sono due rette;
- hanno la stessa direzione;
- non hanno punti in comune.

Si concluderà dicendo che se due rette soddisfano tali condizioni sono PARALLELE.

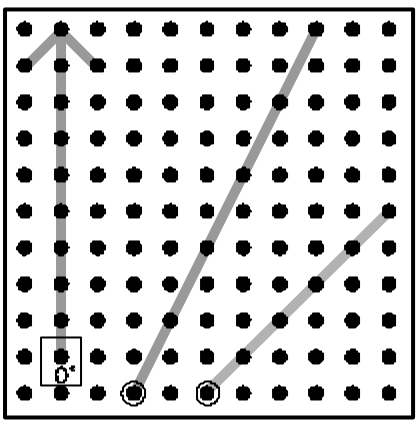


fig. 246

Sul geopiano si tendono due elastici, di colore diverso, che individuano due rette ed un terzo elastico che individua la direzione 0°, come da disegno. Si rilevano le direzioni dei due "elastici-rette" e si pongono le seguenti domande:
- I due elastici hanno la stessa direzione?
- Le due "rette-elastici" sono parallele?
- Modifica la posizione di un estremo di un elastico in modo da ottenere il parallelismo fra i due elastici.

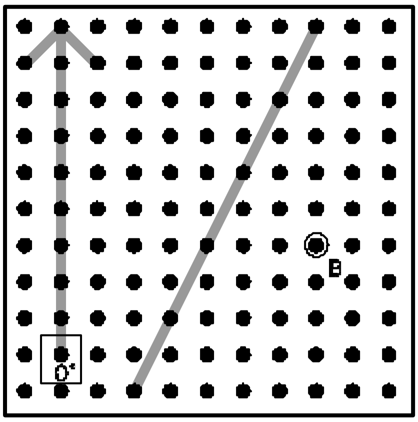
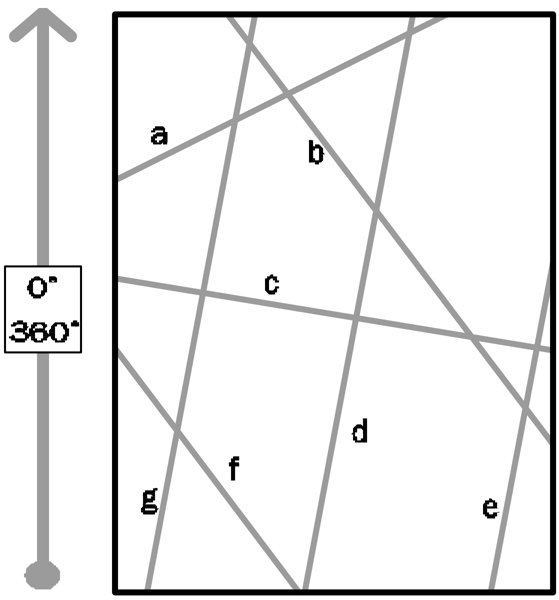


fig. 247

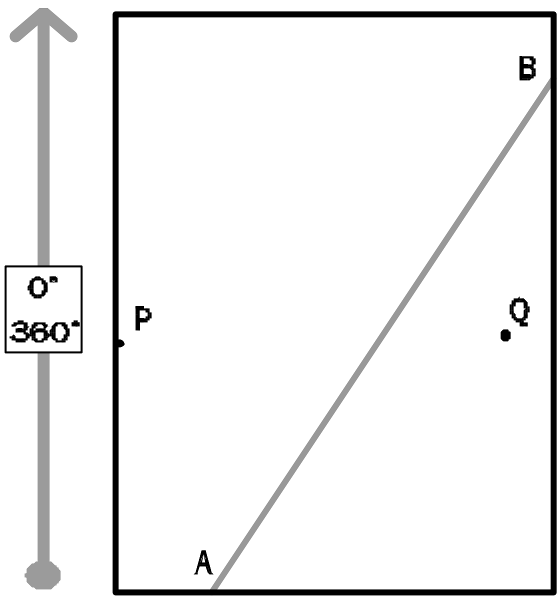
Si tende un elastico per individuare una retta e si evidenzia un punto B. Si invita il bambino a tendere un altro elastico che individui una retta passante per il punto B e parallela a quella data (il bambino procederà per tentativi ed errori).



Completa la tabella sottostante:

retta	direzione in °	rette parallele
a		
b		
c		
d		e , g
e		
f		
g		

fig. 248



Quale è la direzione della retta AB ? ______

Partendo dal punto P traccia una retta di colore rosso che ha la stessa direzione della retta AB.

Traccia poi un'altra retta blu, con la stessa direzione, che passa per il punto Q.

Le rette rossa e blu (hanno la stessa direzione della retta AB) sono parallele alla retta AB ?___

Le rette rossa e blu sono parallele fra di loro?__

fig. 249

RETTILINEE PARALLELE

La definizione di parallelismo fra rette può essere estesa anche ai segmenti ed alle semirette e, in tal caso, la definizione di parallelismo diventa:

Due rettilinee sono parallele se le rette da esse individuate sono parallele.

In tal modo si può avere:

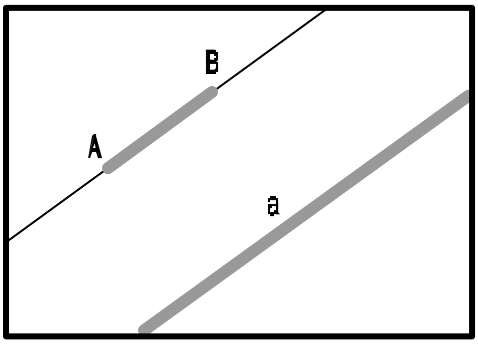


fig. 250

Segmento parallelo ad una retta: **AB // a**

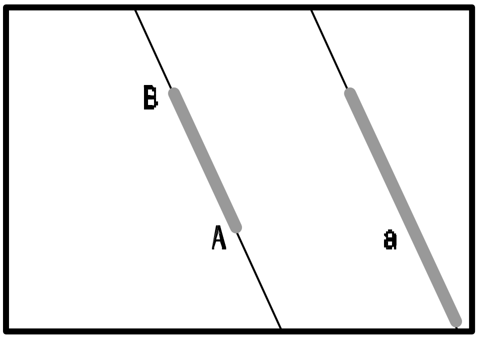


fig. 251

Segmento parallelo ad una semiretta: **AB // a**

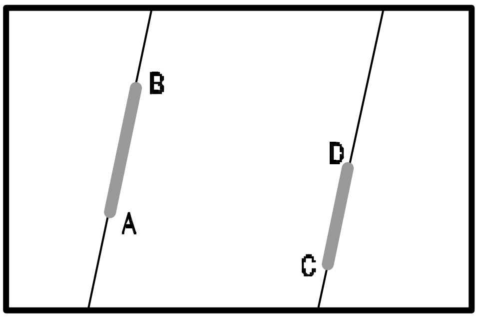


fig. 252

Segmento parallelo ad un altro segmento: **AB // CD**

Parallelismo nella realtà

- Sul piano del banco vengono messi tre pennarelli (o matite, o listelli,...) diversamente orientati. Si chiede poi al bambino di orientare i pennarelli blu e verde in modo che risultino paralleli al pennarello rosso.
- Osservando una scala a pioli collocata orizzontalmente sul pavimento, si chiede di verificare se i pioli (segmenti sul piano del pavimento) hanno tutti la stessa direzione e quindi se sono paralleli. Si chiede poi se anche le stanghe della scala sono parallele tra di loro.

Si portano i bambini a scoprire, attraverso opportune domande, casi di parallelismo negli oggetti e nelle cose della loro realtà.

- Gli spigoli dei gradini di una scala sono paralleli?
- Le traversine delle rotaie del treno sono parallele?
- Lo spigolo in alto dell'aula è parallelo allo spigolo che la stessa parete forma sul pavimento?
- Gli spigoli opposti del tuo banco sono paralleli?
- Le aste della ringhiera della scala sono parallele?
- I due spigoli verticali della lavagna sono paralleli?
- Lo spigolo della carta geografica e lo spigolo della parete sono paralleli?

IL PARALLELISMO NEI QUADRILATERI

I quadrilateri, avendo come confine dei segmenti, possono essere classificati in funzione del parallelismo fra i loro lati. Si dà luogo ad una classificazione basata sulle proprietà legate al parallelismo.

Un quadrilatero si chiama ***TRAPEZIO*** *se almeno due suoi lati sono fra loro paralleli.*

Un trapezio si chiama ***PARALLELOGRAMMO*** *se i suoi lati sono a due a due paralleli.*

- POLIGONI
  - QUADRILATERI
    - TRAPEZI
      - PARALLELOGRAMMI
      - NON PARALLELOGRAMMI
    - NON TRAPEZI
  - NON QUADRILATERI

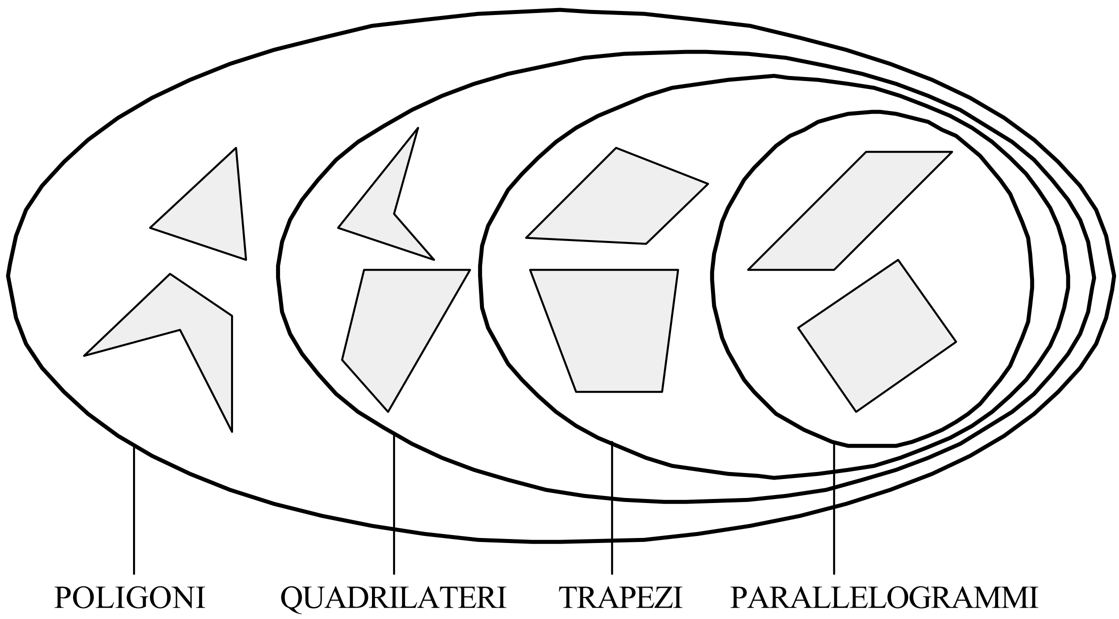


fig. 253

Sul piano pavimento, utilizzando aste di lunghezze diverse, si costruiscono dei quadrilateri. Con delle corde si evidenziano le rette individuate dai lati dei quadrilateri e si invitano i bambini a cogliere eventuali parallelismi.

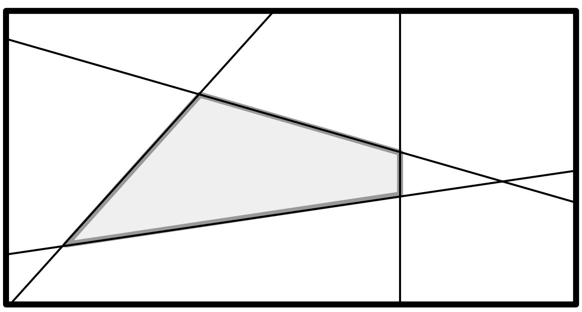


fig. 254

Ci sono dei lati paralleli ?
Alla risposta negativa si definisce il quadrilatero come NON TRAPEZIO.

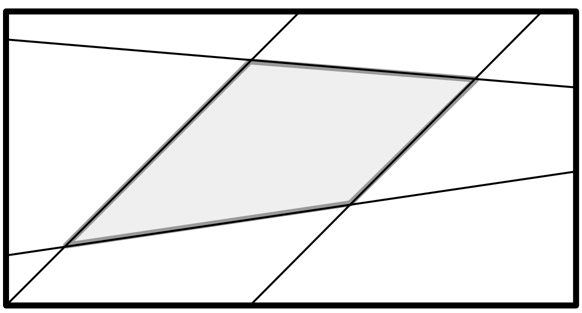


fig. 255

Ci sono almeno due lati paralleli ?
Alla risposta affermativa si definisce il quadrilate-ro come TRAPEZIO.

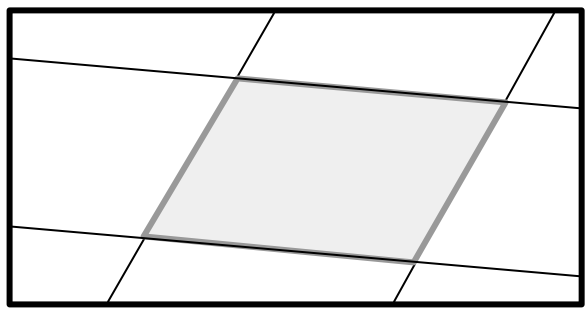


fig. 256

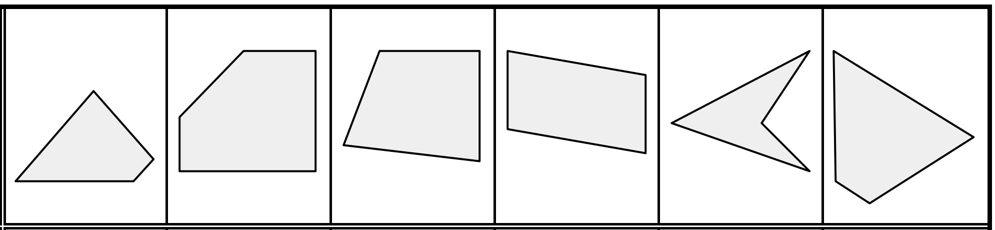
Ci sono almeno due lati paralleli ? Si, quindi è un TRAPEZIO. *Anche gli altri due lati sono tra loro paralleli* ?
Alla risposta affermativa si definisce tale trapezio come PARALLELOGRAMMO.

Successivamente si può chiedere ai bambini di costruire:
- quadrilateri non trapezi;
- quadrilateri trapezi;
- trapezi non parallelogrammi;
- trapezi parallelogrammi;

e di ricercarli in ambiti della realtà quotidiana:
- Un aquilone che tipo di quadrilatero è?
- La porta, la finestra, la lavagna, ecc.
- La ringhiera delle scale, ecc.

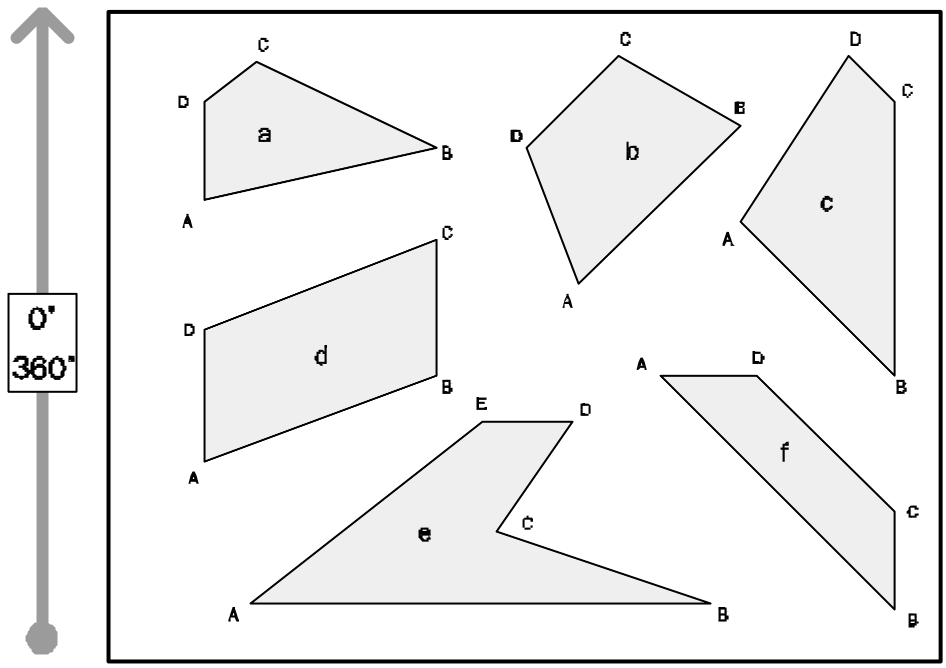
Si possono anche sollecitare capacità logiche legate al rapporto fra il particolare e il generale:
- Ogni quadrilatero è un trapezio?
- Ogni quadrilatero è un parallelogrammo?
- Tutti i parallelogrammi sono anche dei trapezi?
- Tutti i trapezi sono anche dei parallelogrammi?
- Alcuni trapezi possono essere anche dei parallelogrammi?
- Solo alcuni trapezi sono anche dei quadrilateri?

Classifica le figure mettendo una crocetta nelle caselle opportune.



NON QUADRILATERI						
QUADRILATERI	X					
NON TRAPEZI						
TRAPEZI	X					
NON PARALLELOGRAMMI	X					
PARALLELOGRAMMI						

fig. 256



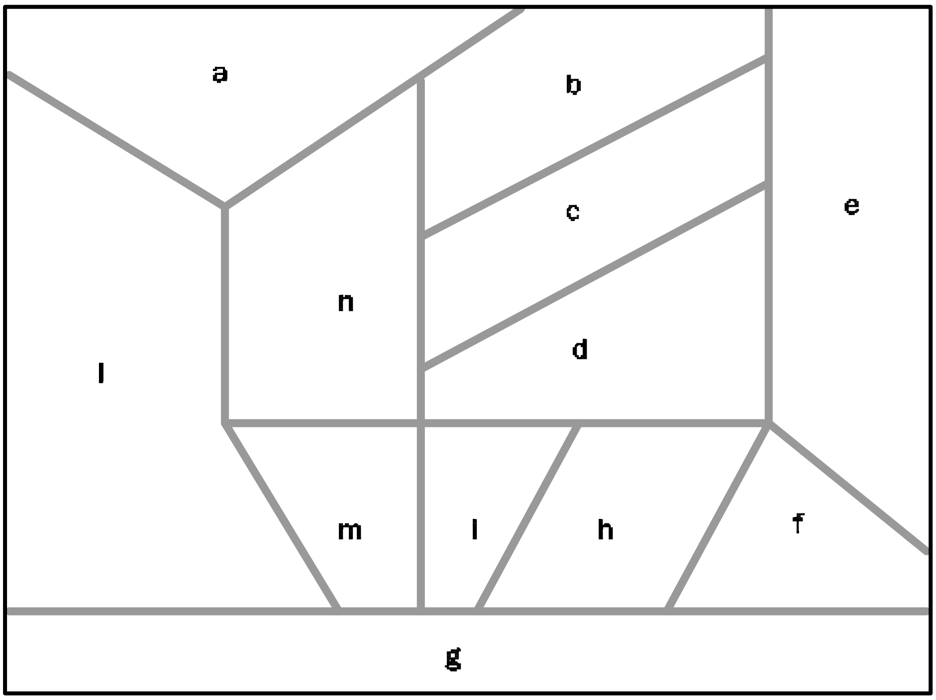
Nel piano sono stati tracciati dei poligoni.

Osserva i loro lati e le direzioni che hanno e poi completa le tabelle sottostanti.

	Lati //	Direzione lati //
a		
b		
c		
d	AD//BC, AB//DC	0°, 60°
e		
f		

	a	b	c	d	e	f
NON QUADRILATERO						
QUADRILATERO	X					
NON TRAPEZIO	X					
TRAPEZIO						
NON PARALLELOGRAMMO	X					
PARALLELOGRAMMO						

fig. 257



Le rettilinee tracciate nel piano lo suddividono in regioni di diversi tipi. Classifica tali regioni e com-pleta la tabella sottostante.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n
angolo	X											
NON angolo												X
poligono												X
NON poligono	X											
poligono quadrilatero												X
poligono NON quadrilatero												
quadrilatero trapezio												X
quadrilatero NON trapezio												
trapezio parallelogrammo												
trapezio NON parallelogrammo												X

Quale regione è un semipiano ? ____

Unendo insieme tutte le regioni diverse dalla regione a si ottine un angolo ? ____________________

fig. 258

14.
PERPENDICOLARITA' FRA RETTILINEE

RETTE PERPENDICOLARI

Due rette di un piano possono essere parallele o incidenti o coincidenti. Se sono parallele non hanno alcun punto in comune; se sono incidenti hanno un solo punto in comune; se sono coincidenti hanno tutti i loro punti in comune.
Si considerano ora le rette incidenti.

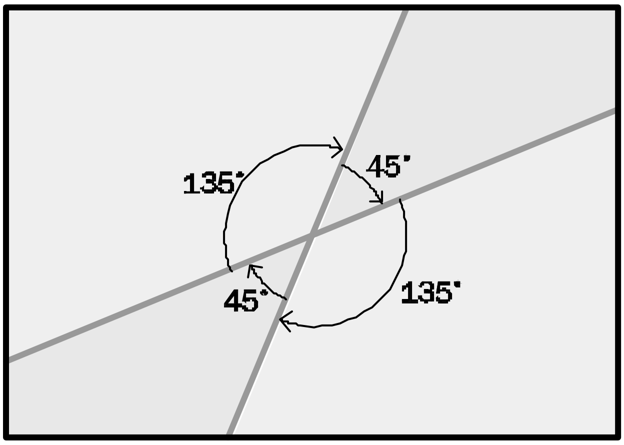


fig. 259

L'incidenza fra due rette permette di suddividere il piano in quattro angoli. Esaminati come ampiezza, questi risultano a due a due uguali:

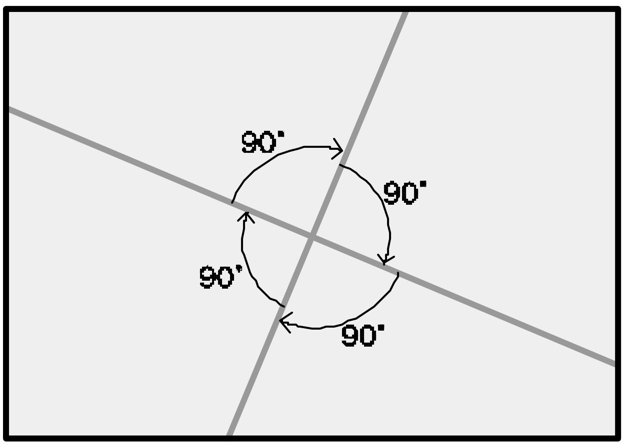


fig. 260

Due rette di un piano incidenti in un punto sono dette ***PERPENDICOLARI*** *se formano quattro angoli di uguale ampiezza.*

Ciascuno dei quattro angoli uguali è la quarta parte dell'angolo giro e pertanto è un angolo retto. Quindi, quando due rette intersecandosi formano angoli retti sono fra loro perpendicolari.

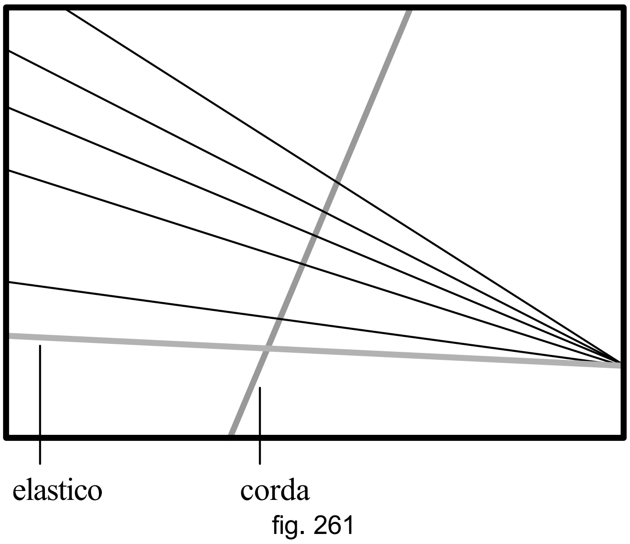


fig. 261

Per dare al bambino il concetto di perpendicolarità, si possono utilizzare una corda e un grosso elastico stesi sul piano-pavimento a formare due rette incidenti (fig. 261). Si invita l bambino a misurare l'ampiezza degli angoli formati dalle due "rette" (utilizzando un goniometro tipo quelli della lavagna) in modo da scoprire che non sono tutti uguali, ma sono a due a due uguali.
Il bambino deve, mantenendo fermo un estremo dell'elastico-retta, spostarlo fino ad ottenere quattro angoli uguali e quindi retti.
Se, dopo uno spostamento, con il goniometro si verifica che l'uguaglianza non è stata raggiunta, si procede con altri tentativi.

Quando le due "rette" formano i quattro angoli uguali, si dicono PERPENDICOLARI.

Analogo esercizio si può realizzare con elastici sul piano del banco: due bambini tendono due elastici in modo da ottenere due rette perpendicolari. Un terzo bambino verificherà la perpendicolarità misurando col goniometro.
Altri esercizi simili possono essere realizzati sul geopiano.

Un altro modo per creare rette perpendicolari si realizza con piegature di fogli.

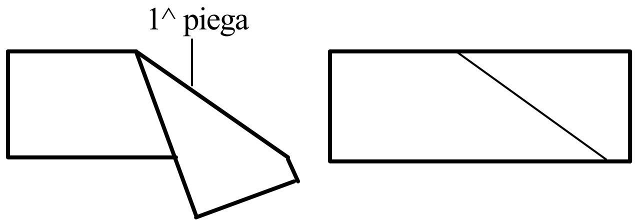


fig. 262

Si danno ai bambini foglietti che rappresentano tanti piani. Se si piega un foglio e poi lo si riapre, la piegatura, andando da confine a confine, risulta essere una retta.

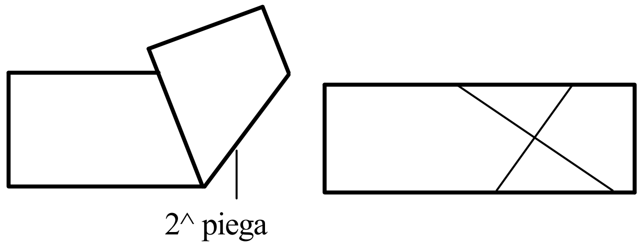
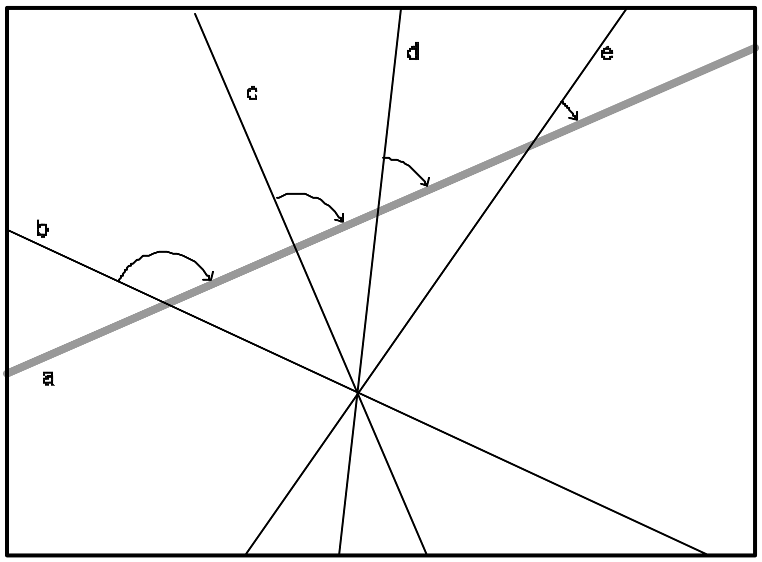


fig. 263

Si chiede al bambino di fare un'altra piega in modo da formare due rette incidenti e perpendicolari. Se, dopo la verifica con il goniometro, non dovessero risultare perpendicolari, si procede con una nuova piegatura. Ottenuta la perpendicolarità, si incolla il "piano foglietto" sul quaderno e si evidenziano le due rette perpendicolari.



Le rette b, c, d, e sono tutte incidenti la retta a.

Misura gli angoli segnati e scrivi la loro ampiezza vicino alle frecce che li indicano.

Quale delle quattro rette incidenti è perpendicolare alla retta a ?

____

fig. 264

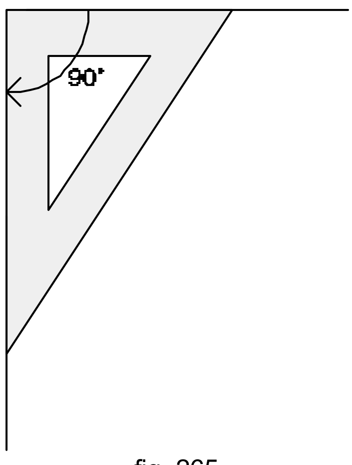
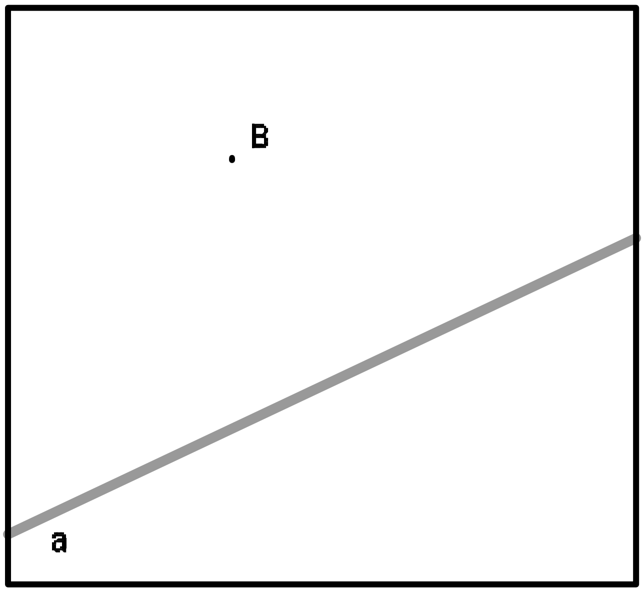


fig. 265

Una squadra ha due lati che individuano un angolo retto, cioè sono tra di loro perpendicolari. E' perciò uno strumento che aiuta a individuare o tracciare rettilinee perpendicolari.

Anche un qualsiasi pezzo di carta può essere trasformato in uno strumento adatto alla perpendicolarità:
- si piega il pezzo di carta, essendo la piega rettili-nea si può pensare quanto ottenuto un semipiano.
- si piega nuovamente il pezzo di foglio in modo che la rettilinea si divida in due parti una sovrapposta all'altra.



Usando la squadra individua e poi traccia una retta passante per il punto B e perpendicolare alla retta a.

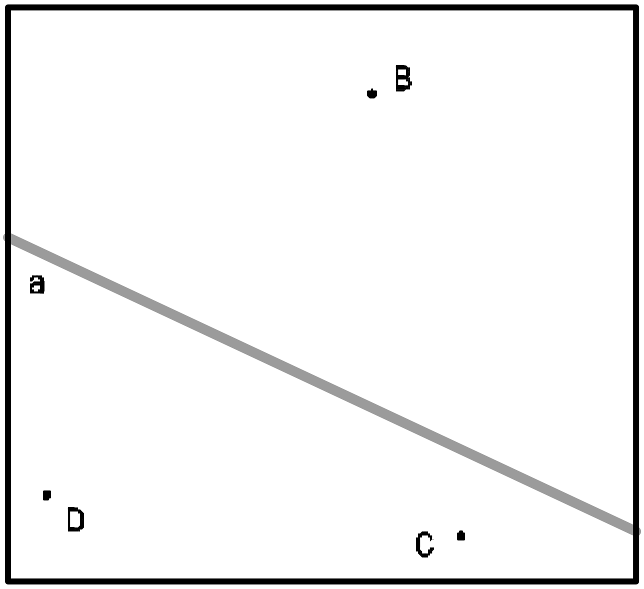
Puoi tracciare altre rette passanti per B e perpendicolari alla retta a ? ______________

Traccia una nuova retta passante per B e parallela alla retta a.

Misura gli angoli formati dalle due rette tracciate. E' vero che queste due rette sono tra loro perpendicolari ? ________________

Traccia un rettangolo di colore rosso che abbia tre dei suoi quattro lati sulle tre rette presenti nel piano.

fig. 266



Usando una squadra, traccia le perpendicolari alla retta a passanti una per il punto B e l'al-tra per il punto D.

Le due perpendicolari tracciate sono tra di lo-ro parallele ? ____________________

Traccia una retta passante per C e parallela alla retta a.

Quest'ultima retta è perpendicolare alle altre due rette tracciate prima ? ____________

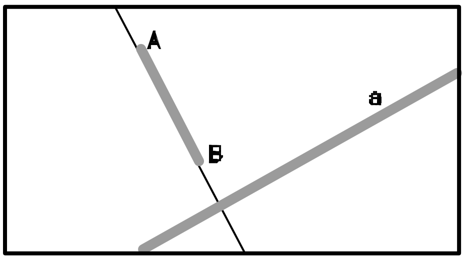
Le quattro rette presenti nel piano lo dividono in nove regioni. Colora di giallo le regioni an-golo e di verde la regione poligono.

Come si chiama tale poligono ? __________
Quale è la sua area e quale è il suo perimetro?
________________ ________________

fig. 267

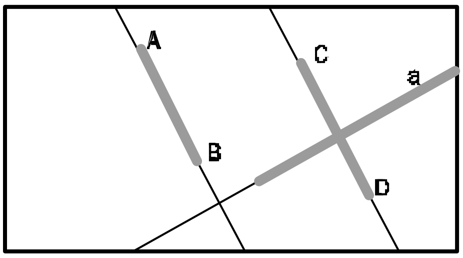
RETTILINEE PERPENDICOLARI

Analogamente al parallelismo, la perpendicolarità può essere considerata anche tra segmenti e semirette oltre che fra rette.



Segmento perpendicolare ad una retta:
AB ^ a

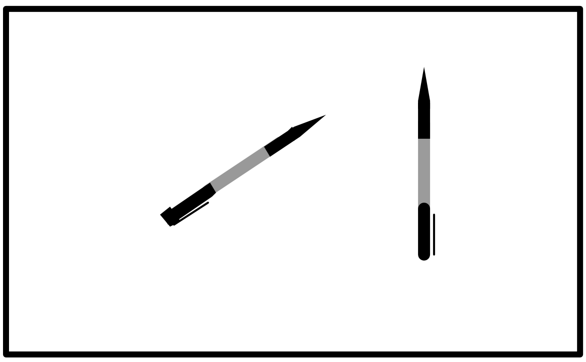
fig. 268



Segmenti perpendicolari ad una semiretta:
AB ^ a
CD ^ a

fig. 268

A livello manipolatorio, sul piano del banco, si posizionano due matite colorate:



269

il bambino deve ruotare la matita blu fino a quando risulta perpendicolare alla matita rossa.

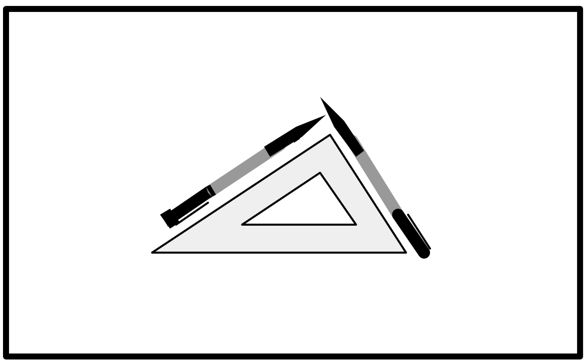


fig. 270

Per verificare la perpendicolarità, è sufficiente usare un angolo retto di una squadra o di un foglio,...

Si invita poi il bambino a scoprire la perpendicolarità sulla realtà circostante:
- nei bordi del quaderno;
- nel reticolo-quadrettatura del quaderno;
- nella cornice del quadro;
- negli stipiti della porta.

La perpendicolarità può essere cercata attraverso piegamenti settoriali del corpo:

posiziona le braccia in modo che risultino fra loro perpendicolari:

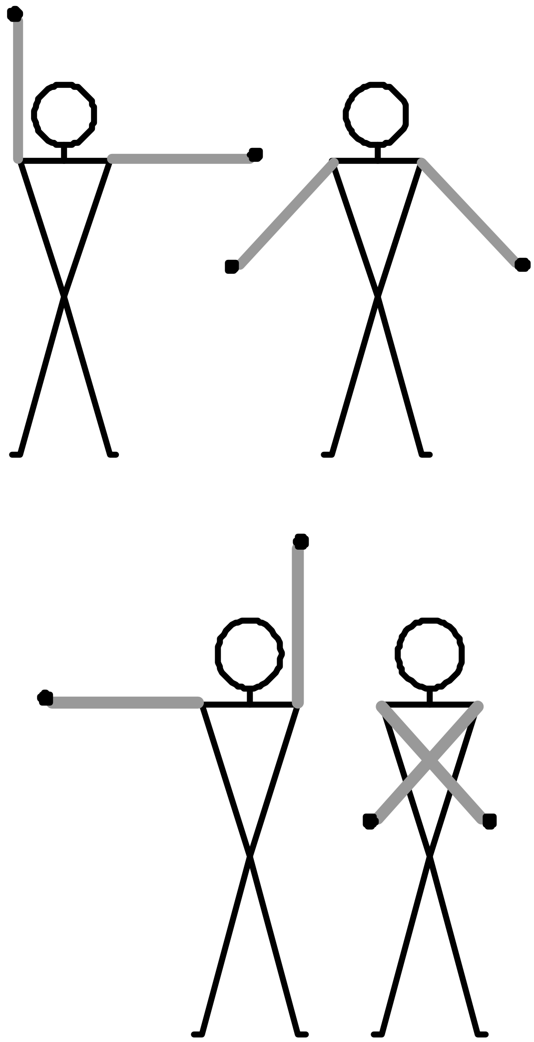


fig. 271

Come si può notare dalle figure 271 le possibilità sono tante e ne esistono anche delle altre.
Esistono anche altre forme di perpendicolarità, più difficili delle precedenti, relative al proprio corpo, come le seguenti.

Piega l'avambraccio in modo che risulti perpendicola-re al braccio:

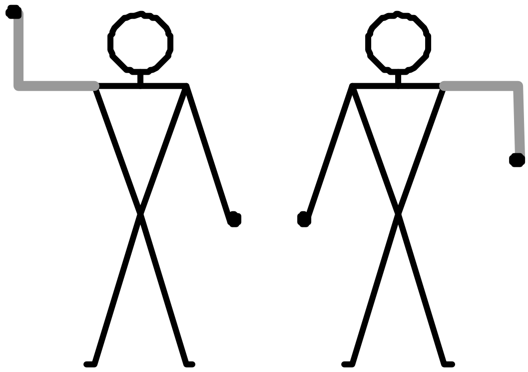


fig. 272

Alza il braccio fino a quando è perpendicolare al corpo:

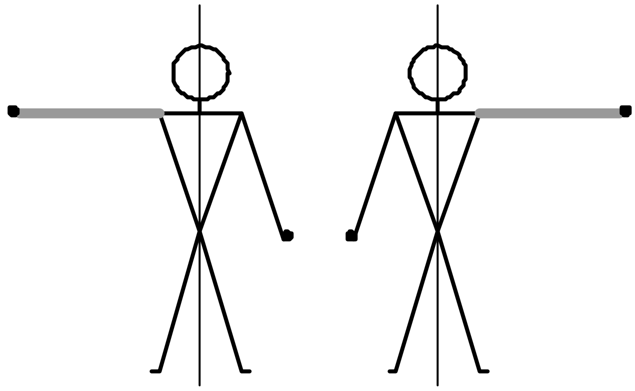
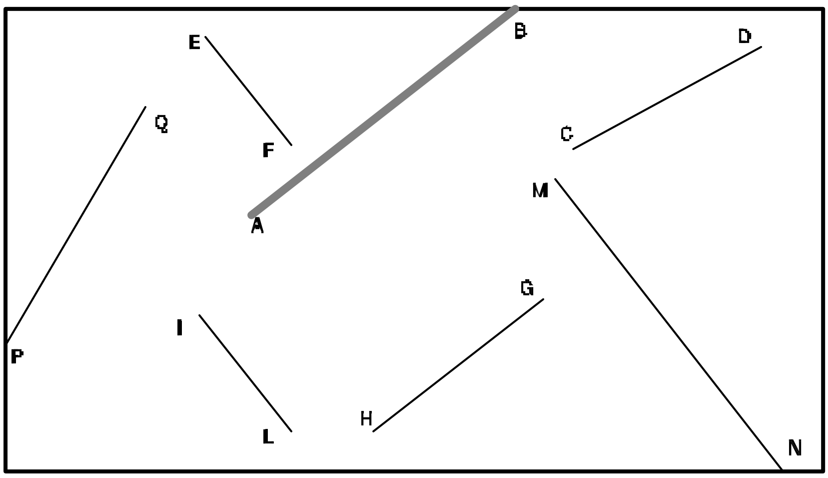


fig. 273

Altri esercizi, riguardanti le perpendicolarità eseguite con il corpo, sono i seguenti:
- piega il corpo in modo che il busto risulti perpendicolare sia alle gambe sia alle braccia;
- sdraiati per terra e alza le gambe fino a quando sono perpendicolari al busto;
- stando seduto per terra, allarga le gambe fino a quando sono fra di loro perpendicolari.

Si possono poi proporre esercizi su schede del tipo:



Utilizzando la squadra, individua le rettilinee perpendicolari alla semiretta AB: ________

Quale è il segmento che non ha rettilinee perpendicolari ?________

Elenca le rettilinee fra loro parallele:

____

____

fig. 274

LE ALTEZZE NELLE FIGURE GEOMETRICHE

Un punto esterno ad una retta può essere congiunto con i punti della retta mediante un'infinità di segmenti. Fra tutti questi segmenti uno solo risulta perpendicolare alla retta. Tale segmento viene chiamato "**altezza del punto rispetto alla retta**" e l'estremo del segmento che si trova sulla retta viene detto "**piede dell'altezza**".

*Si definisce "**distanza tra un punto e una retta**" la misura della altezza condotta dal punto alla retta.*

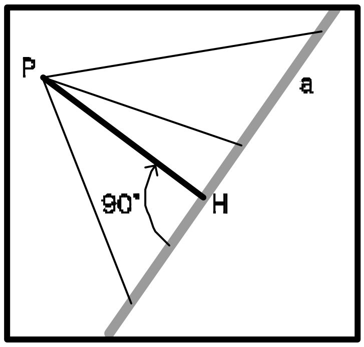
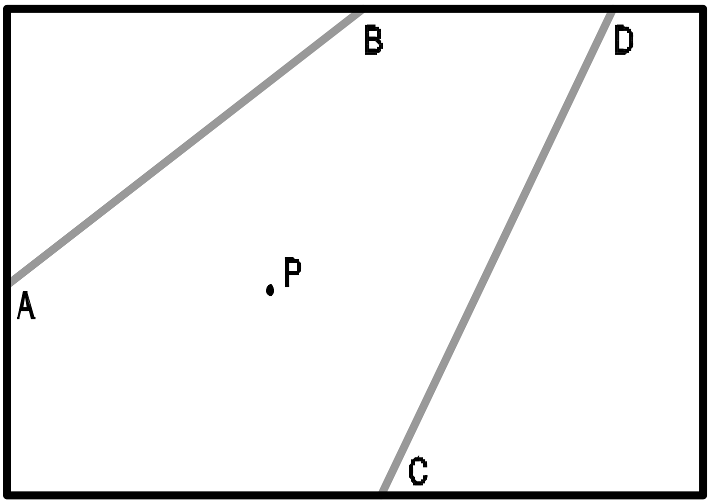


fig. 275

PH = altezza di P rispetto ad a.

H = piede della altezza.

PH = distanza del punto P dalla retta a.



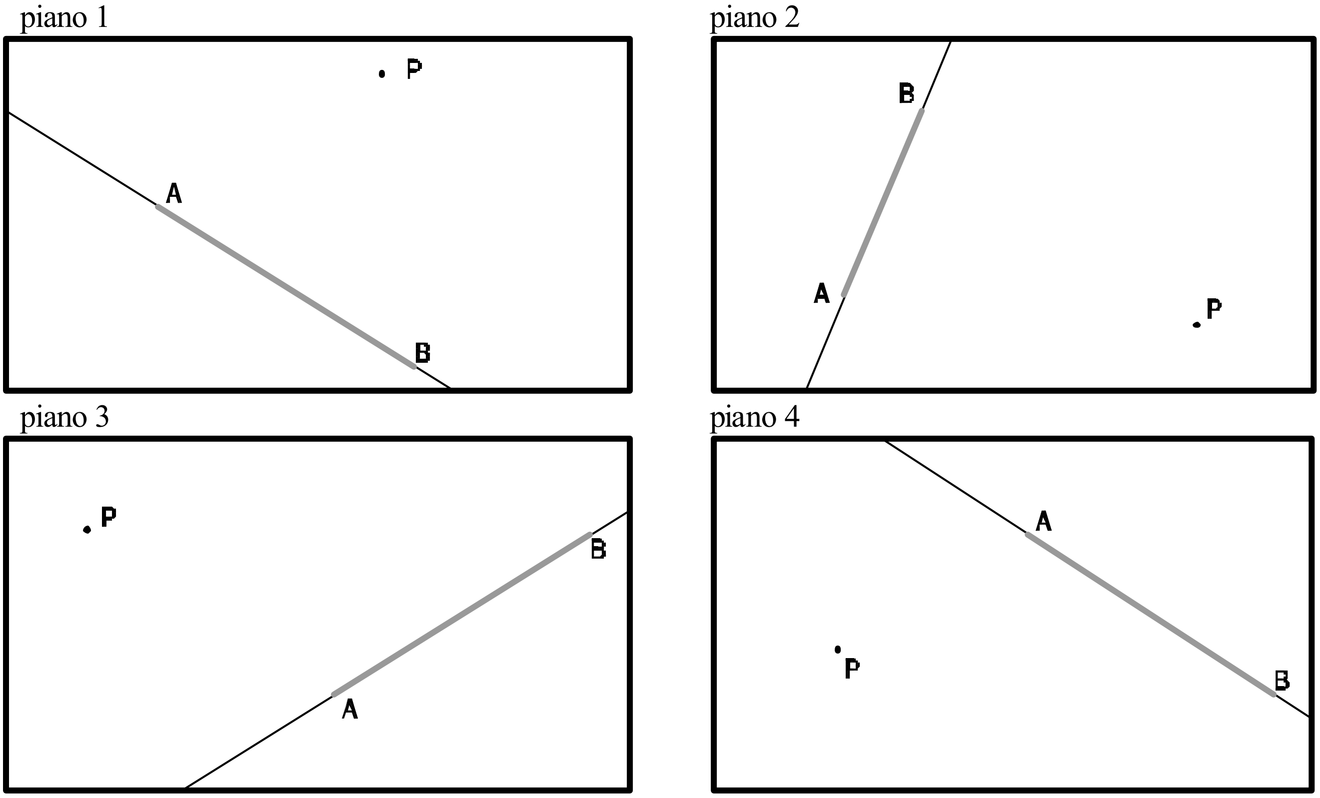
Usando la squadra, traccia dal punto P l'altezza relativa alla retta AB e chiama con H il piede dell'altezza. Quanto dista il punto P dalla retta AB ?__________

Traccia un altro segmento PK con K appartenente alla retta AB.
La lunghezza del segmento PK è maggiore o minore della lunghezza della altezza PH ? ______________

Traccia l'altezza PF relativa alla retta CD. Quanto dista il punto P dalla retta CD ? __________________

fig. 276

L'altezza è un ente molto importante nelle figure geometriche, per tutte le analisi di tipo dimensionale che seguiranno. Si parla di:
- altezze del triangolo,
- altezza della piramide,
- ...
in questi casi l'altezza non è relativa ad una retta, ma è relativa ad un segmento, ad una superficie, ...
E' chiaro che il segmento individua una retta e la base di una piramide individua un piano, quindi la perpendicolare è:
- alla retta individuata dal segmento,
- al piano individuato dalla base,
- ...



Traccia, in tutti i 4 piani, le altezze PH relative ai segmenti AB.
In quali piani il piede dell'altezza appartiene al segmento AB ? ______________________________
In quali piani il piede dell'altezza è sul prolungamento del segmento AB ? _____________________

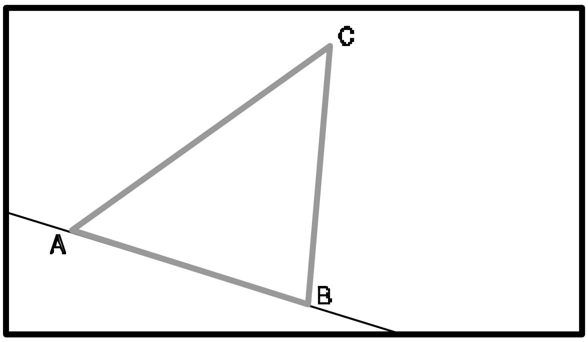
fig. 277

Nel piano disegnato a fianco devi:

tracciare un segmento AB e tratteggiare la retta individuata dal segmento;

tracciare un segmento PQ altezza di un punto P rispetto al segmento AB, dove Q, che è il piede dell'altezza, è esterno al segmento AB.

fig. 278



Considera, nel triangolo ABC, il lato AB e il suo vertice opposto C.

Da C traccia l'altezza relativa al lato AB e chiama con H il piede dell'altezza.

L'altezza CH viene detta "altezza del triangolo relativa alla base AB".

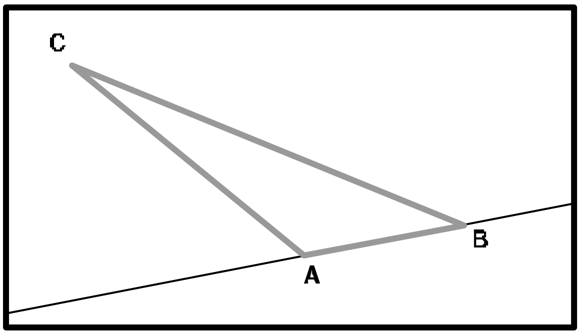
Traccia l'altezza BQ relativa alla base AC.

Esiste un'altra altezza del triangolo diversa dalle due altezze appena tracciate ? ______________

Se esiste tracciala. Quante altezze esistono in un triangolo ? ____________________________

In questo triangolo le altezze sono tutte interne ad esso ? _______________________________

fig. 279



Nel triangolo disegnato traccia, usando la squadra, l'altezza relativa alla base AB.

Il piede H dell'altezza CH è interno alla base AB ? ________________________________

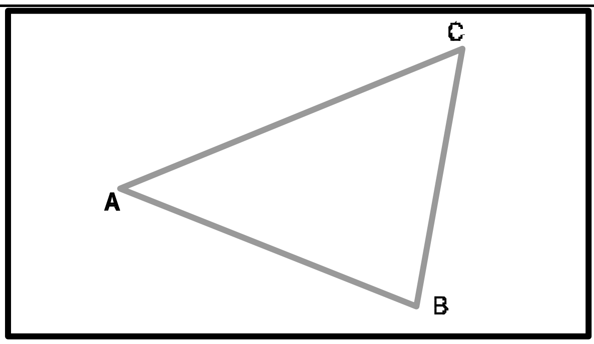
L'altezza CH è interna al triangolo ? _______

L'altezza CH divide il triangolo ABC in due parti ? ______________________________

C'è una sola altezza del triangolo che risulta interna al triangolo stesso. Individuala e tracciala.

Da quale vertice parte ? ________________ E' relativa a quale base ? __________________

fig. 280



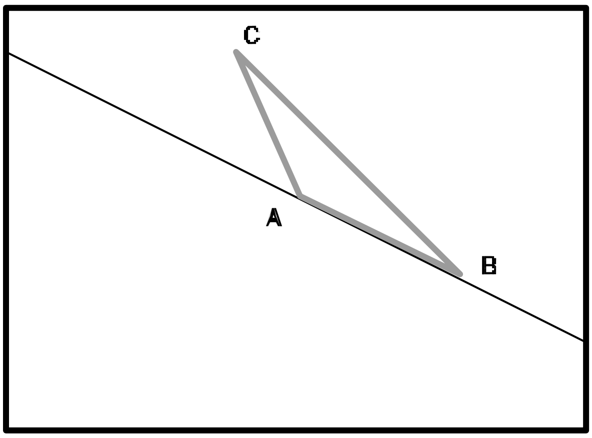
Nel triangolo ABC traccia, usando la squa-dra, le tre altezze.

Queste tre altezze si incontrano tutte in un unico punto ? ____________________

Se la risposta è negativa significa che hai trac-ciato le altezze in modo impreciso. Concellale e ritracciale con maggiore precisione.

Il punto di incontro delle tre altezze di un triangolo è chiamato ORTOCENTRO del triangolo.

fig. 281



Traccia le tre altezze del triangolo ABC.

Queste tre altezze si incontrano tutte in un unico punto ? ____________________

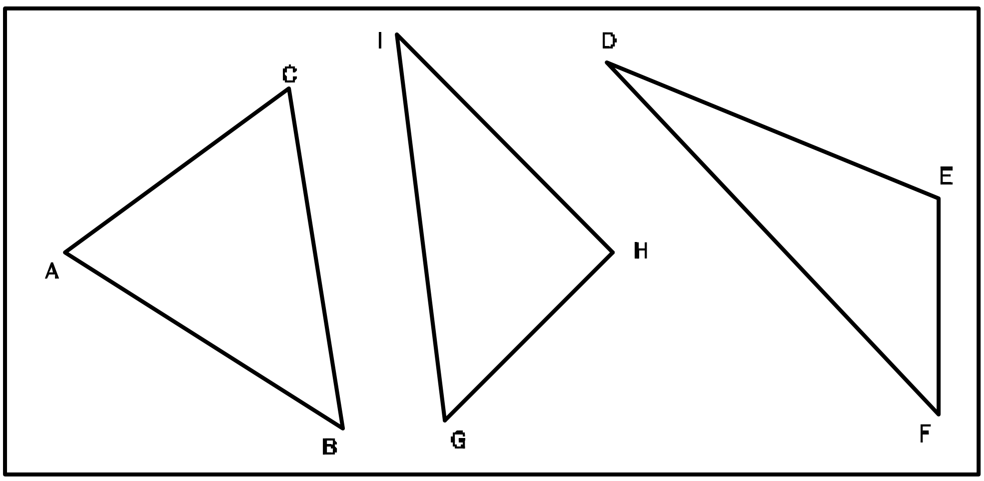
Traccia di colore rosso le rette contenenti le tre altezze. Tali rette si incontrano tutte in uno stesso punto ? ________________

Analogamente a prima, questo punto viene chiamato ancora *ORTOCENTRO*.

fig. 282

*L'**ortocentro** è il punto in comune alle rette contenenti le tre altezze di un triangolo.*

Nel triangolo non ottusangolo l'ortocentro è il punto d'incontro delle altezze e appartiene al triangolo; nel triangolo ottusangolo l'ortocentro è il punto d'incontro dei prolungamenti delle altezze ed è esterno al triangolo.



Usando la squadra come strumento per tracciare le altezze devi:

trovare l'ortocentro del triangolo ABC;

tracciare l'altezza più corta del trian-golo DEF.

Tracciare l'altezza del triangolo GHI che parte dal vertice I ed è relativa alla base GH.
Questa altezza coincide con un lato del triangolo ? ______________________________

fig. 283

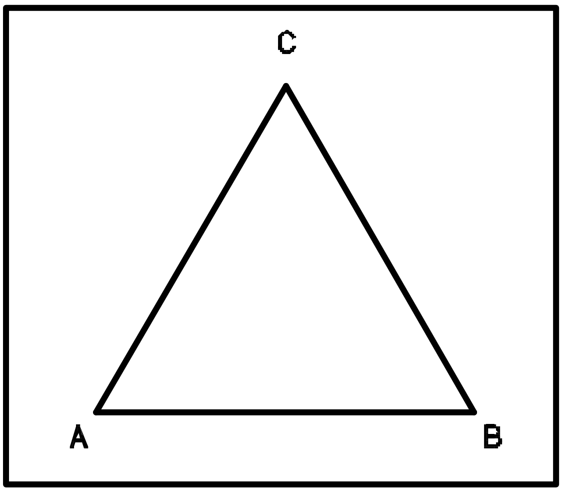
Traccia nel piano disegnato a fianco un trian-golo rettangolo e colora i suoi lati di rosso.

Con una biro nera traccia le tre altezze del triangolo.

Il suo ortocentro è il vertice dell'angolo retto ? ____________________

Due altezze coincidono con i lati ? __________

fig. 284



Il triangolo ABC è equilatero.

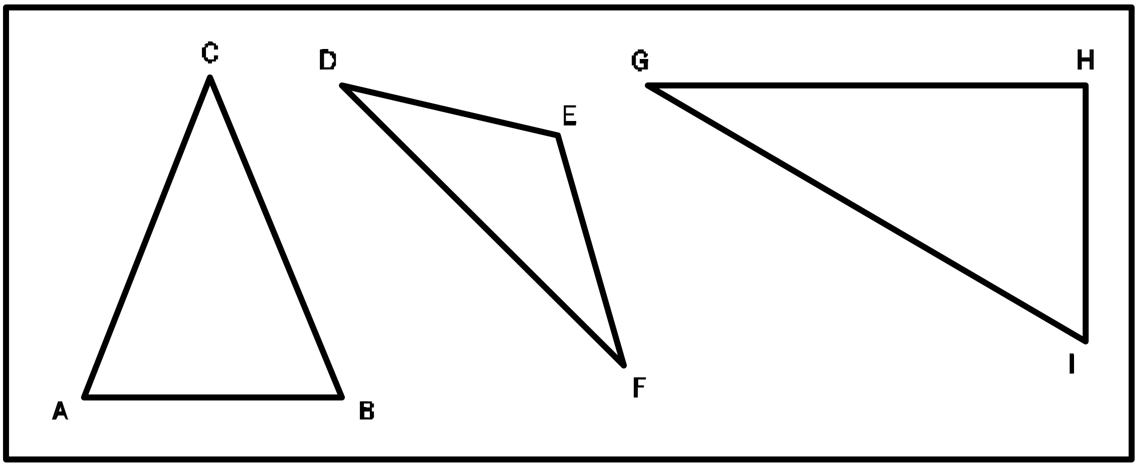
Verificalo misurando le lunghezze dei lati:
AB = BC = CA = cm ________

Traccia le sue altezze CH, BK, AX.

Le altezze tracciate hanno tutte la stessa lunghezza ? ____________________________

Queste altezze dividono gli angoli interni in parti uguali ? __________________________

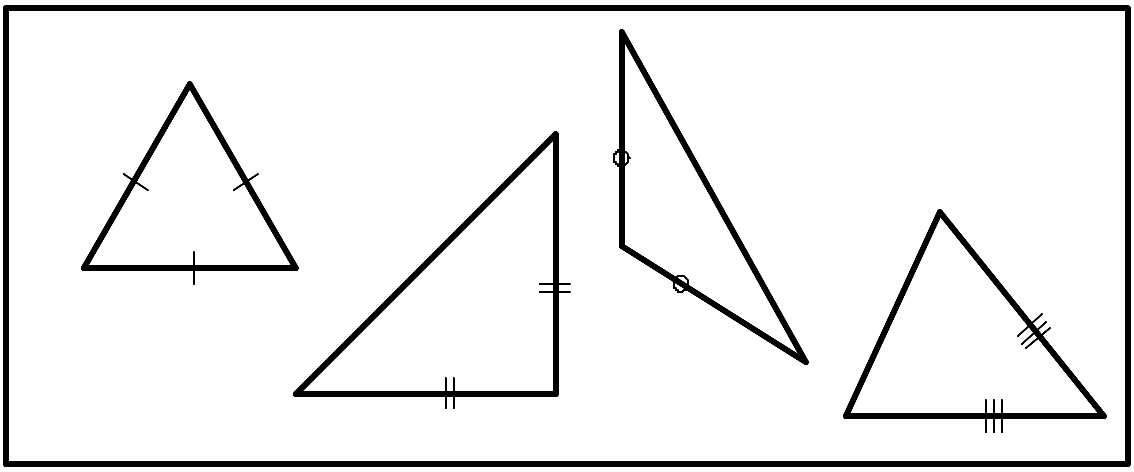
fig. 285



I tre triangoli sopra disegnati sono rispettivamente acutangolo, ottusangolo e rettangolo, ma due sono anche isosceli.
Traccia con il colore rosso le bisettrici degli angoli interni con vertici in C, E, H.

Quali sono i triangoli dove la bisettrice tracciata contiene un'altezza del triangolo ? _____________
Traccia l'altezza BH relativa alla base AC. Questa altezza è anche bisettrice dell'angolo interno con vertice in B ? ____

fig. 286



Traccia solo le bisettrici degli angoli interni dei triangoli che contengono anche le altezze dei triangoli stessi.

fig. 287

LA PERPENDICOLARITA' NEI QUADRILATERI

In ogni quadrilatero si può procedere a delle classificazioni in funzione delle perpendicolarità fra lati e fra diagonali.

*Un trapezio viene detto **TRAPEZIO RETTANGOLO** se ha un lato perpendicolare ad entrambi i due lati paralleli.*
*Un parallelogrammo viene detto **RETTAN-GOLO** se ha tutti i lati consecutivi tra loro perpendicolari.*

Di seguito vengono riportati alcuni esempi di quadrilateri che presentano delle perpendicolarità fra i lati e fra le diagonali.

E' importante evidenziare che la perpendicolarità fra i lati di un rettangolo è un caso particolare della perpendicolarità dei trapezi rettangoli, cioè un rettangolo è, oltre che un particolare parallelogrammo, anche un particolare trapezio rettangolo.

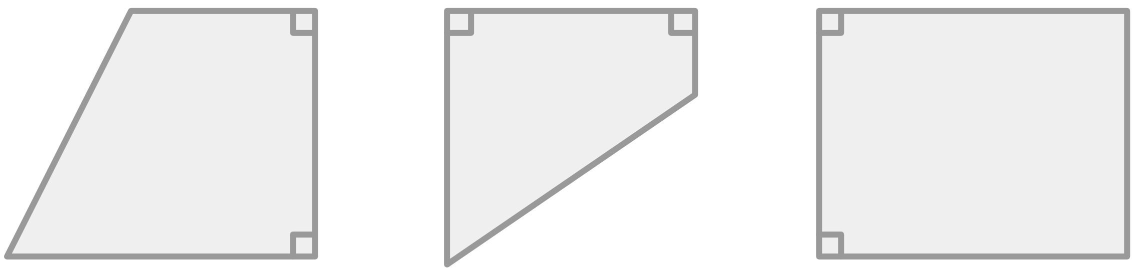


fig. 288

TRAPEZI RETTANGOLI

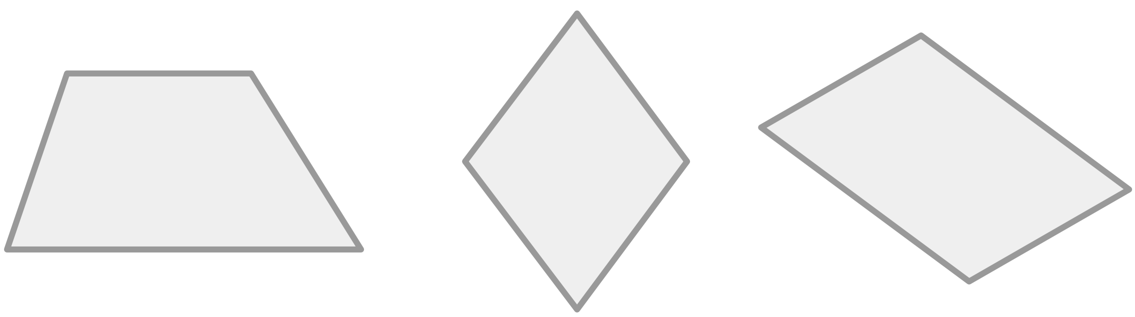


fig. 289

TRAPEZI NON RETTANGOLI

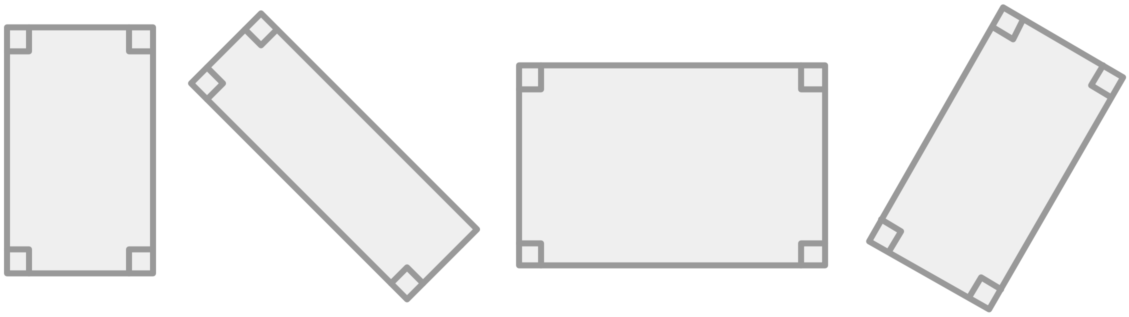


fig. 290

RETTANGOLI

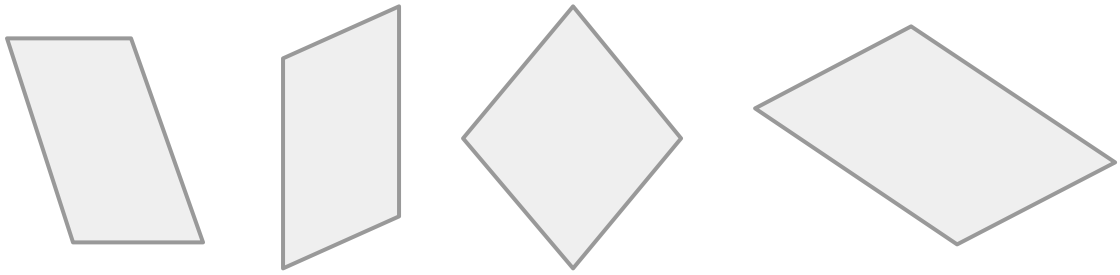


fig. 291

PARALLELO-GRAMMI NON RETTANGOLI

Esistono dei quadrilateri che hanno le diagonali tra di loro perpendicolari e fra questi rivestono una particolare importanza i rombi e, come caso particolare, i quadrati.

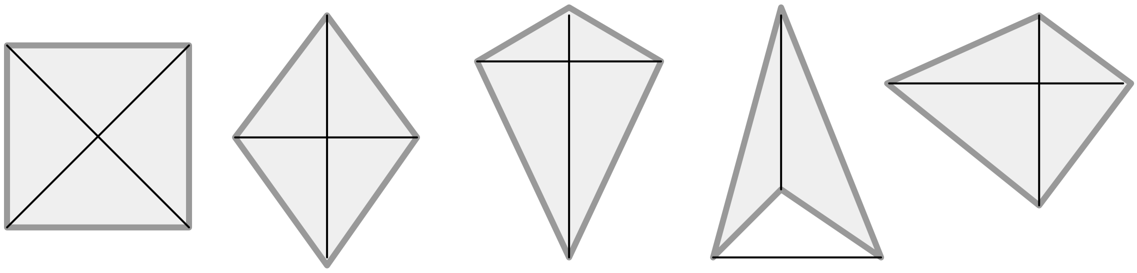
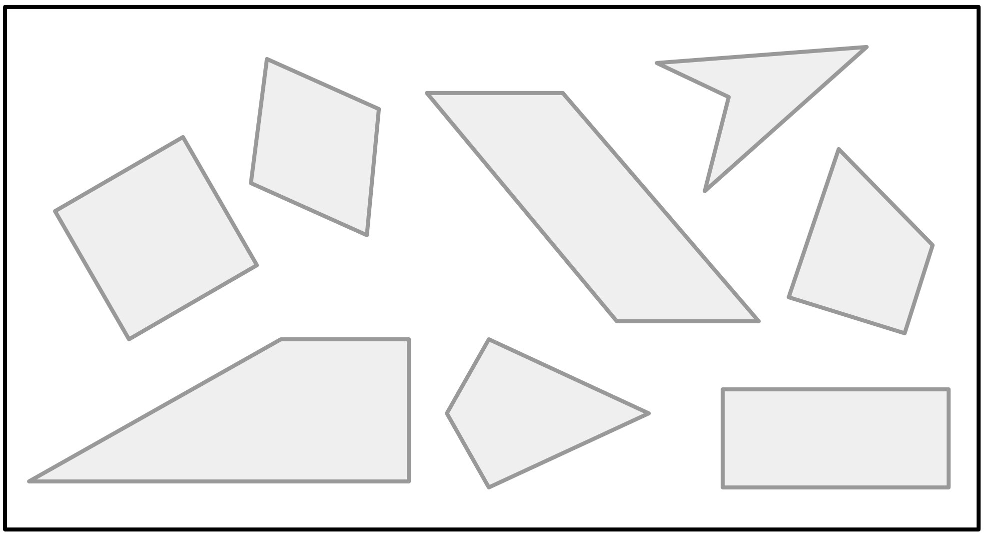


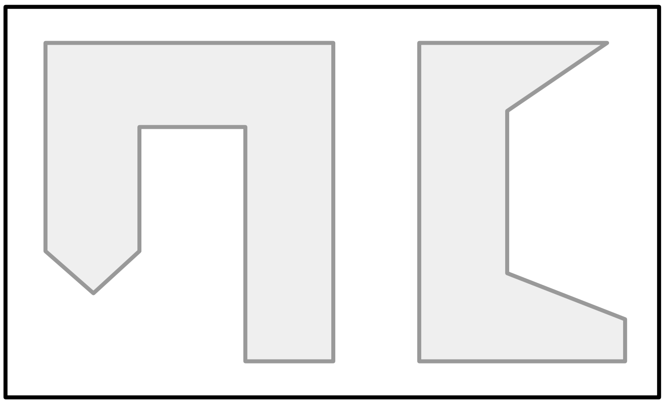
fig. 292

QUADRILA-TERI CON DIAGONALI PERPENDI-COLARI



Colora di blu i lati dei quadrilateri che hanno le diagonali fra loro perpendicolari e tracciale.
Colora di giallo i quadrilateri che sono trapezi rettangoli.
Indica con un asterisco i quadrilateri che sono dei rettangoli.

fig. 293



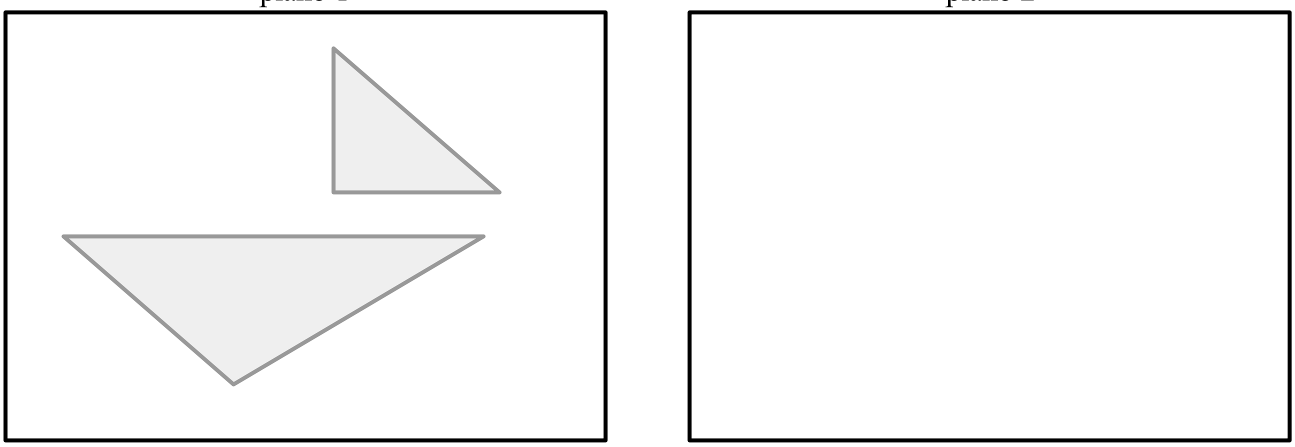
Dividi l'ennagono in quattro trapezi rettangoli.

Dividi l'eptagono in tre trapezi rettangoli.

N.B. Ricorda che anche i rettangoli sono dei trapezi rettangolo.

fig. 294

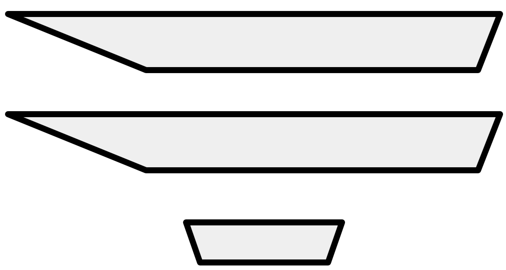
piano 1 piano 2



Usando della carta trasparente, ricalca i due triangoli che sono disegnati nel piano 1.
Ricomponi nel piano 2 le due figure triangolari ritagliate e incollale in modo da formare un trapezio rettangolo.

fig. 295

Altre schede di composizione vanno proposte in modo che il bambino arrivi a pensare le figure complesse come formate da figure elementari. A livello manipolatorio si possono proporre esercizi di composizione con figure ritagliate da cartone o da compensato.



PROBLEMA:
Componi i tre trapezi in modo da formare la lettera A dello alfabeto.

Soluzione del problema.

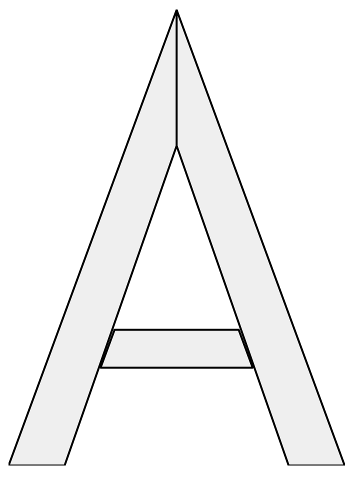
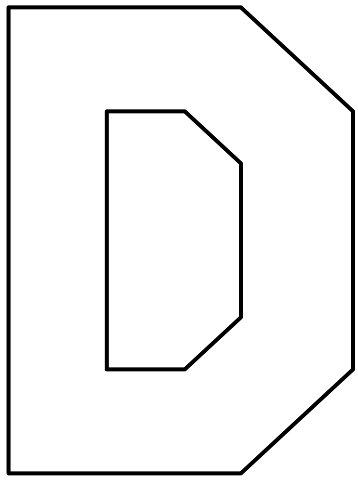


fig. 296



Scomponi la lettera "D" dell'alfebato, disegnata a fianco, in tanti trapezi rettangoli (ricorda che il rettangolo è anche un trapezio rettangolo).

Colora di verde le parti rettangolari e di rosso i rimanenti trapezi rettangoli.

fig. 297

LE ALTEZZE NEI TRAPEZI

In un trapezio alcuni segmenti acquistano un valore particolare e quindi vengono denominati in modo specifico:

> *si chiamano **Basi del Trapezio** i suoi lati paralleli (se sono di lunghezze diverse pren-dono il nome di **Base Minore** e **Base Mag-giore**);*

> *si chiama **Altezza del Trapezio** ogni segmento che da un punto qualsiasi di una base risulti altezza rispetto alla base opposta.*

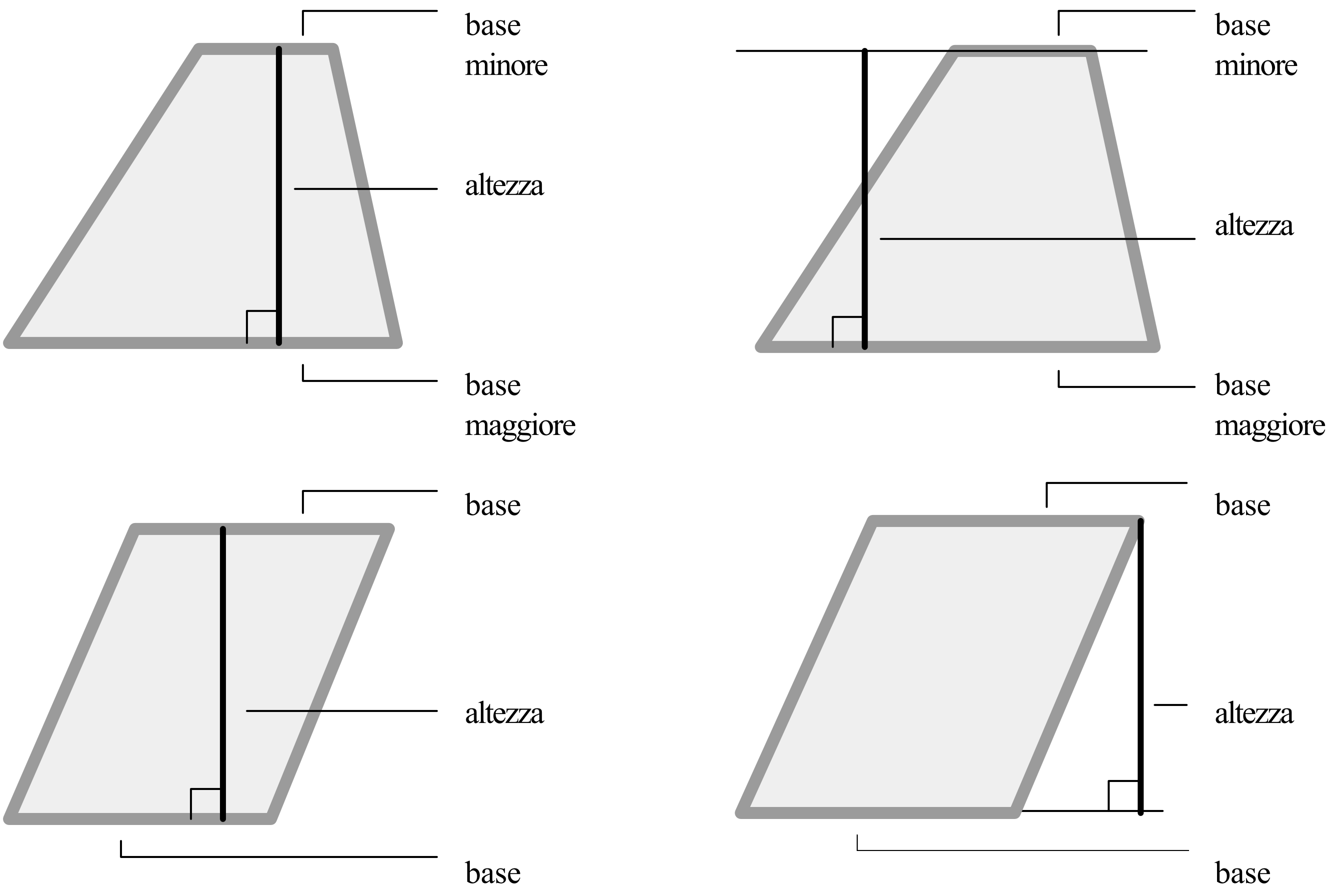
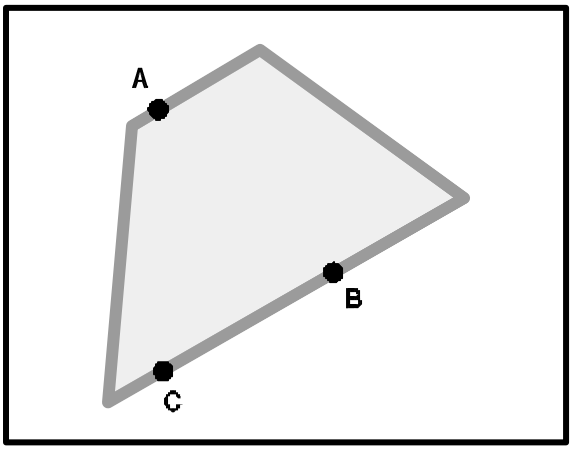


fig. 299

Quando un trapezio è anche un parallelogrammo, si parla semplicemente di BASE e di ALTEZZA del parallelogrammo (non si può parlare di base maggiore o di base minore).

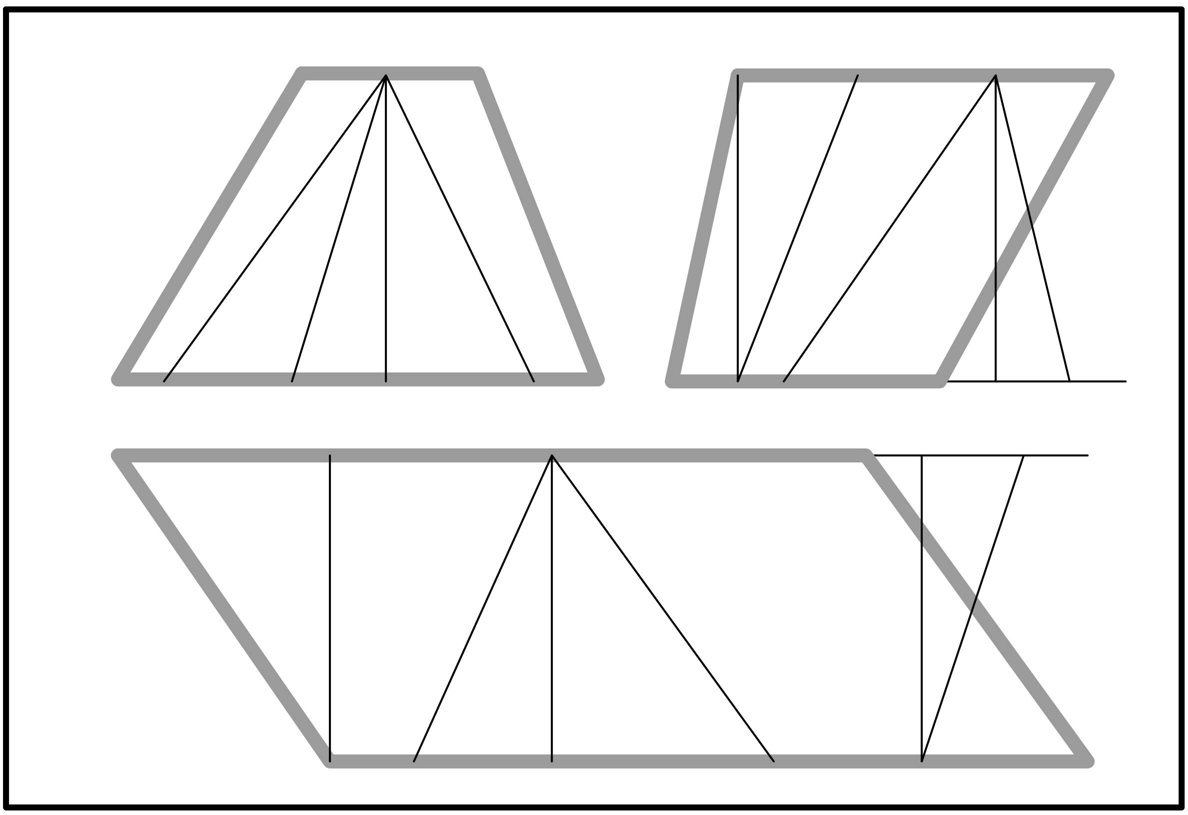


Partendo dai punti A, B, C (che si trovano sulle basi del trapezio) traccia le altezze del trapezio.

Le tre altezze tracciate sono fra loro parallele ? ____________________

Queste tre altezze hanno tutte la stessa lunghezza ? ____________________

fig. 300

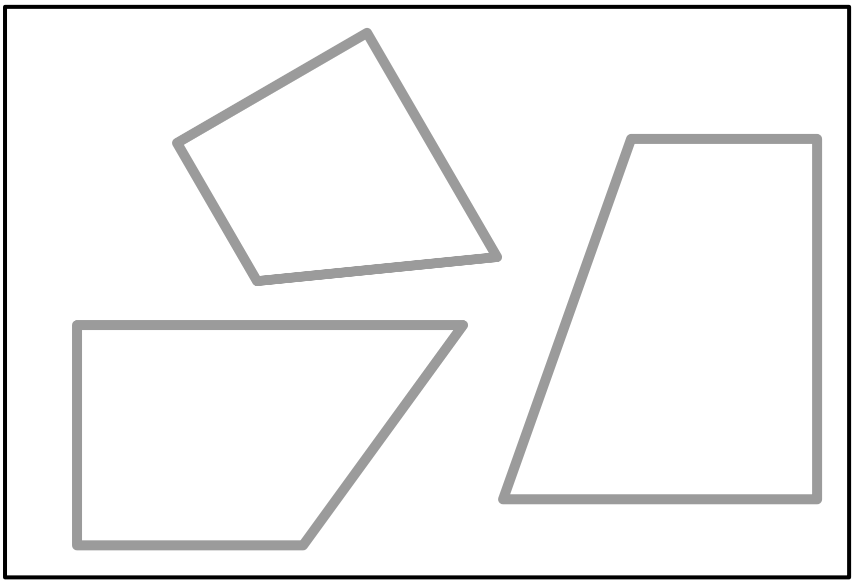


Fra i segmenti tracciati con righettine sottili individua quelli che sono altezze dei rispettivi trapezi e colorali di rosso.

Nei trapezi non sono state tracciate le altezze che sono completamente esterne ai trapezi stessi. Traccia queste altezze e colorale di verde.

In ogni trapezio tutte le altezze hanno la stessa lunghezza ? ____________________

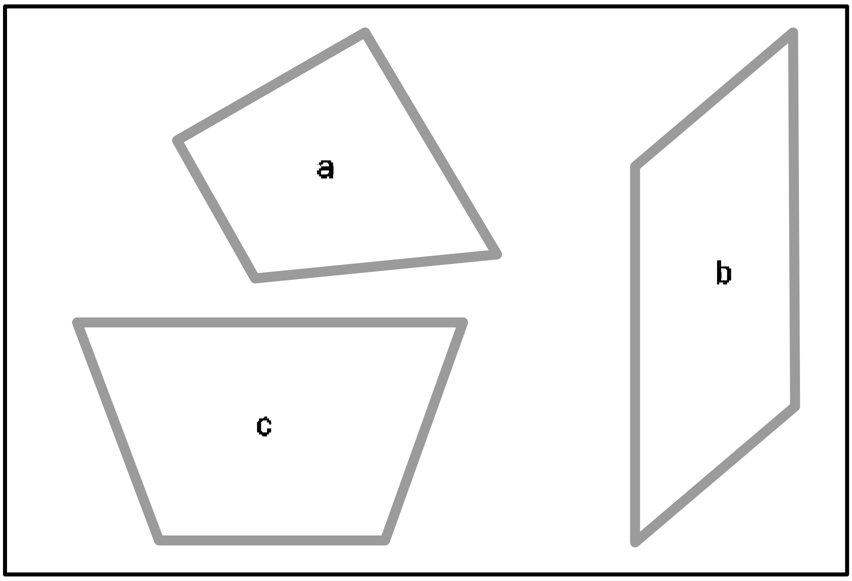
fig. 301



Nei trapezi rettangoli disegnati a fianco, colora di rosso il lato che è anche altezza.

Disegna, nel trapezio che ha l'altezza più grande, un'altra altezza che è in parte conte-nuta e in parte è ester-na al trapezio stesso.

fig. 302



Nel trapezio a traccia l'altezza che lo divide in un triangolo e in un rettangolo.

Nel trapezio parallelogrammo b trova, per tentativi, l'altezza che lo divide in due trapezi uguali.

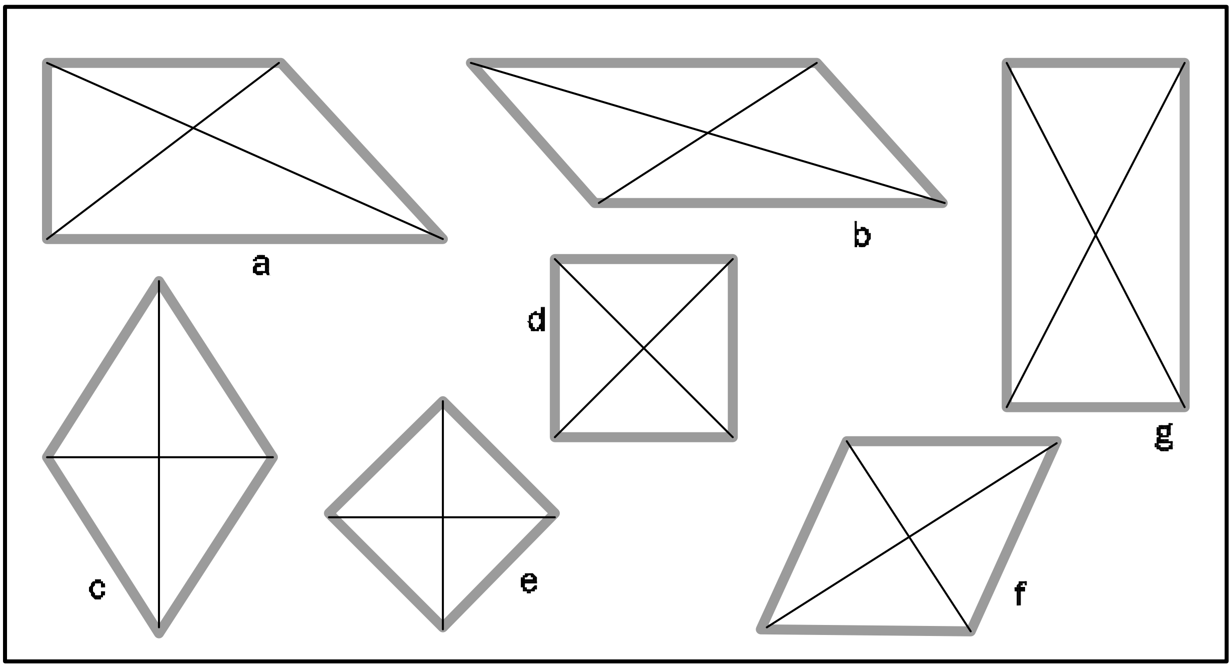
Nel trapezio c traccia un'altezza che non lo divide in due figure.

fig. 303

Altre considerazioni interessanti si possono fare sulle diagonali dei quadrilateri ed in particolare dei trapezi. La perpendicolarità fra le diagonali è una proprietà che in seguito aiuterà il bambino a concepire nei quadrilateri delle regolarità che si manifestano con delle forme che si ripetono. Ad esempio:

- i trapezi parallelogrammo che hanno le diagonali perpendicolari sono dei rombi e le diagonali dividono tali quadrilateri in 4 triangoli rettangoli tutti congruenti fra di loro;
- i trapezi parallelogrammo che hanno le diagonali perpendicolari e uguali sono dei quadrati.

Con la seguente scheda si incomincia a porre l'attenzione del bambino su queste particolarità.



Osserva bene la forma dei quadrilateri, le dimensioni e le ampiezze degli angoli che si formano con le diagonali e poi completa la tabella sottostante:

	TRAPEZI						
	a	b	c	d	e	f	g
NOME							
BASI DIVERSE							
DIAGONALI PERPENDICOLARI							
UN LATO COME ALTEZZA							
DIAGONALI UGUALI							

E' vero che il quadrilatero d è contemporaneamente quadrato, rombo, rettangolo, parallelogrammo, trapezio e trapezio rettangolo ? ______________________________

Esiste un rombo che non ha le diagonali perpendicolari ? ____________________

Fra le figure disegnate, quale è il trapezio rettangolo che ha le diagonali perpendicolari ? ________

E quali soni i parallelogrammi che hanno le diagonali perpendicolari ? ______________

fig. 304

15.
LE TRASFORMAZIONI

VARIANZE ED INVARIANZE

Il concetto del trasformare può essere espresso in vari modi, come, ad esempio: cambiare, convertire, passare a condizione diversa, modificare, tramutare,...
Tale concetto è interpretabile nei vari ambiti del sapere, essendo trasversale alle varie discipline. Ad esempio si può parlare di trasformazioni di stato (in fisica), di trasformazioni sociali, storiche, economiche, religiose, antropologiche, linguistiche, chimiche, aritmetiche, geometriche, ecc.
Nel descrivere queste trasformazioni, si tende ad evidenziare le caratteristiche che mutano, mentre quelle che rimangono costanti quasi sempre vengono trascurate.

Ad esempio, il carro trainato dal cavallo e il camioncino possono essere visti come inizio e fine di una trasformazione:
- normalmente si evidenziano i *cambiamenti* che sono avvenuti:
  - forza motrice;
  - materiali di costruzione;
  - forma;
  - velocità;
- non si pensa invece alle sostanziali *permanenze*:
  - della funzione;
  - delle parti strutturali fondamentali:
    - . le ruote per il movimento;
    - . il contenitore per il trasporto;
    - . lo sterzo per curvare;
    - . il freno per fermarsi.

Anche il bambino, normalmente, viene attratto e prende coscienza dei particolari che mutano, mentre non osserva tutto ciò che non varia.
Se ad un bambino viene dato un pezzo di filo di ferro rettilineo e lo si invita a trasformarlo in una forma ad anello, il bambino coglie immediatamente il cambiamento della forma ma difficilmente percepisce che alcune caratteristiche (la lunghezza, il peso, lo spessore,...) rimangono invariate.
Per educare in maniera appropriata alle trasformazioni, l'insegnante deve sapere evidenziare bene sia ciò che muta sia ciò che non muta (*le varianze e le invarianze delle trasformazioni*).
Se si trasforma un foglio di carta in un aeroplano, cambiano: la forma, la funzione, la capacità di penetrazione nell'aria, la distribuzione dei pesi,... Che cosa non cambia ?
Le trasformazioni che accadono in natura sono normalmente troppo complesse per essere proposte integralmente ai bambini perché i parametri varianti ed invarianti sono troppo numerosi. Quindi o si semplifica la realtà, o si va in ambiti disciplinari che permettono di lavorare su una quantità limitata di parametri.
La concezione dello spazio e la geometria permettono di affrontare l'educazione al concetto di trasformazione utilizzando pochi parametri ben controllabili. I parametri spaziali che il bambino sa dominare sono: la posizione e la direzione; quindi le prime trasformazioni che si possono proporre riguardano sia i cambiamenti di posizione sia i cambiamenti di direzione.

Osservate secondo le varianze e le invarianze, si possono avere quattro trasformazioni diverse:

1) ***Traslazione****: varianza di posizione; invarianza di direzione.* Se un oggetto direzionato viene spostato senza mutare la sua direzione, allora si dice che subisce una traslazione; analogamente un bambino che avanza o indietreggia o si sposta lateralmente.

2) ***Rotazione attorno al proprio asse****: varianza di direzione; invarianza di posizione.* Se un bambino gira attorno al proprio asse corporeo senza cambiare di posizione, compie una trasformazione di rotazione.

3) ***Curvatura****: varianza contemporanea sia di posizione sia di direzione.* Le invarianze in questo caso, non riguardano i parametri presi in considerazione. Un'automobile, mentre procede, può compiere trasformazioni di traslazione (su di un rettilineo) e trasformazioni di curvatura, quando sterza mentre è in movimento.

4) ***Stazionarietà****: invarianza sia di posizione sia di direzione.* Se un bambino rimane fermo, avvengono delle varianze (le funzioni vitali), ma riguardo ai parametri considerati non si hanno cambiamenti. Quest'ultima trasformazione, che rientra nella categoria più ampia delle trasformazioni identiche, è difficilmente proponibile al bambino della scuola elementare perché non riesce né a viverla né a percepirla come una trasformazione che avviene nel tempo. Si lavorerà perciò sulle altre tre trasformazioni.

Queste tre trasformazioni riguardano, oltre che la concezione spaziale, anche la geometria. Pertanto si avranno anche traslazioni e rotazioni di figure geometriche.

TRASFORMAZIONI NELLE CONCEZIONI SPAZIALI

Traslazioni

Quando si esaminano le traslazioni (varianza posizionale e invarianza direzionale) *è fondamentale distinguere la direzione del soggetto che viene traslato dalla direzione della traslazione*, perché l'invarianza riguarda solo ed esclusivamente la direzione del soggetto traslato:

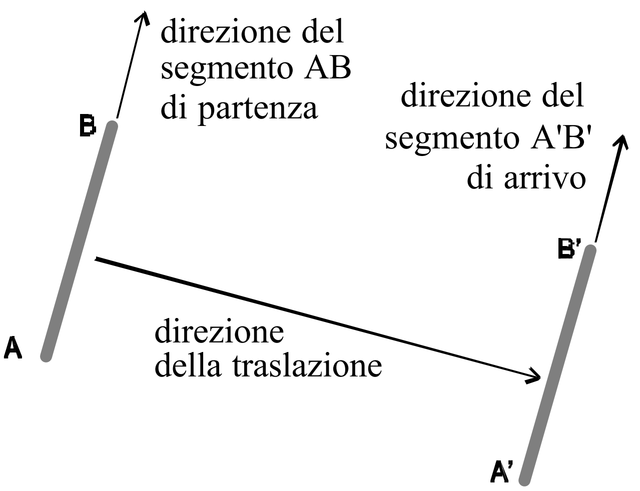


fig. 305

Un bambino può fare percorsi di traslazione se cambiando posizione non cambia la direzione del suo corpo. In tal caso si possono avere diversi tipi di traslazione:

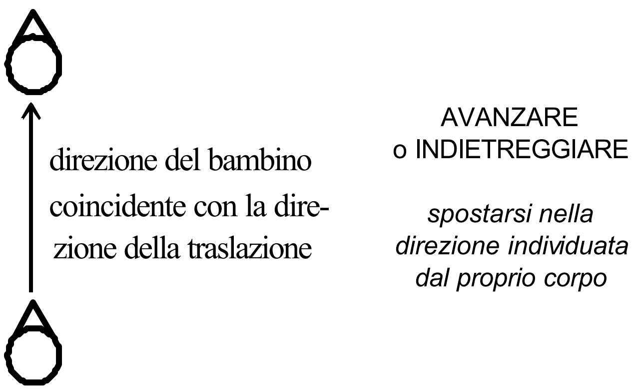


fig. 306

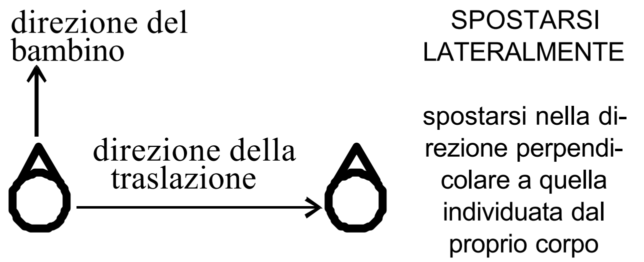


fig. 307

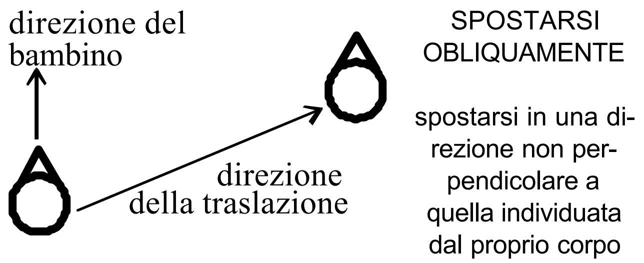
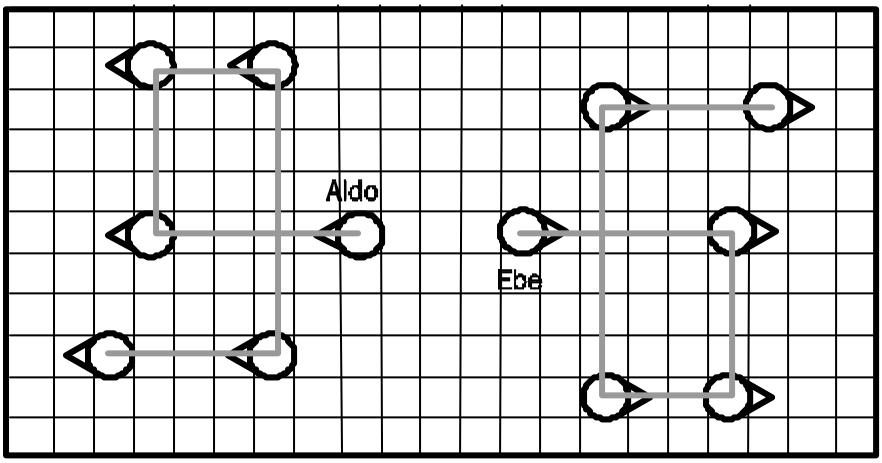


fig. 308

Quando si propongono percorsi di traslazione ai bambini è utile discretizzare il pavimento o sfruttare l'esistenza di mattonelle (evidenziano la vertico-orizzontalità che aiuta molto a mantenere la direzione del proprio corpo), in modo che il passaggio alla fase grafica, sul foglio quadrettato, risulti facilitato.

Di seguito si vedranno alcuni esercizi ambientati in una stanza che ha un pavimento formato da mattonelle sufficientemente grandi da non creare disorientamenti spaziali e spostamenti di traslazione a passettini.

Due bambini, posti uno alle spalle dell'altro e al centro della stanza pavimentata (vedi figura 309), devono compiere percorsi di traslazione corrispondenti alle consegne date dall'insegnante.
Alla fine di ogni traslazione altri bambini mettono sul pavimento delle corde o dei bastoni che documen-tano lo spostamento:



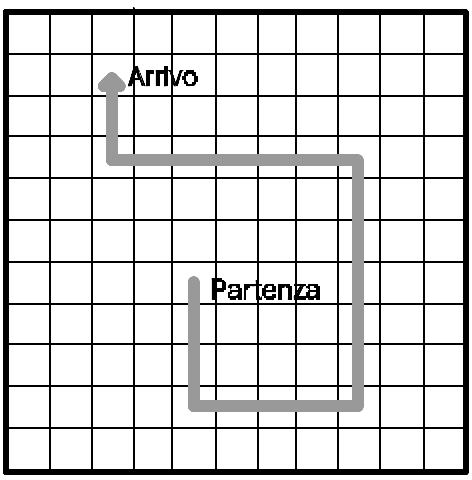
Percorsi fatti da Aldo e da Ebe dopo aver eseguito le seguenti traslazioni:

5 mattonelle avanti
4 mattonelle a destra
3 mattonelle indietro
7 mattonelle a sinistra
4 mattonelle avanti

fig. 309

Altri esercizi non riguardano l'esecuzione delle traslazioni ma sono mirati alla lettura delle stesse.
Sul pavimento vengono disposte delle corde che documentano un percorso. Un bambino viene posto in un estremo del tracciato e deve, senza cambiare la direzione del proprio corpo, seguirlo descrivendo di volta in volta le traslazioni che effettua.

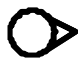
La descrizione deve essere registrata sulla lavagna.
Alla fine il bambino si riposiziona alla partenza ma assume una direzione diversa. Il tracciato viene ripercorso e si ripete tutto come prima. La nuova descrizione verrà registrata a fianco della precedente e si farà osservare che lo stesso tracciato può essere descritto in maniera diversa a seconda di come si è orientati alla partenza.



Risposta del bambino nel caso che l'orientamento di partenza sia:

3 mattonelle avanti
4 mattonelle a sinistra
6 mattonelle indietro
6 mattonelle a destra
2 mattonelle indietro

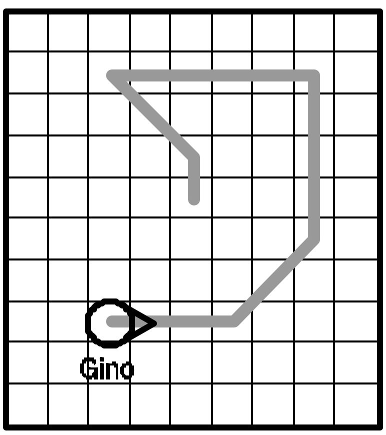
Risposta del bambino nel caso che l'orientamento di partenza sia:



3 mattonelle a destra
4 mattonelle avanti
6 mattonelle a sinsitra
6 mattonelle indietro
2 mattonelle a destra

fig. 310

E' bene introdurre anche le traslazioni con spostamenti obliqui, ma con l'accortezza di scegliere obliquità semplici e compatibili con i piani discretizzati (come è quello dato dalla pavimentazione).

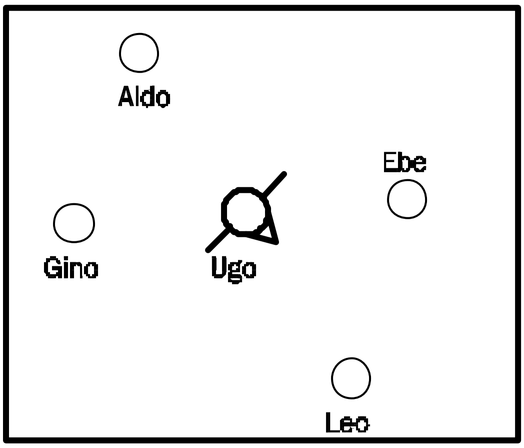


Gino si trova all'inizio di un percorso segnato con una corda. Quali traslazioni deve eseguire per arrivare fino alla fine del percorso ?

La risposta è: *3 mattonelle avanti*
2 mattonelle avanti a sinistra
3 mattonelle a sinistra
5 mattonelle indietro
2 mattonelle avanti a destra
1 mattonella a destra.

fig. 311

Sono interessanti anche gli esercizi in cui le traslazioni servono per mantenere alcuni rapporti topologici. Nel caso sottostante si deve compiere una traslazione laterale per mantenere il davanti-dietro, analogamente una traslazione di avanzamento mantiene la destra-sinistra.



Quali traslazioni deve fare Ugo affinché Ebe e Leo rimangano sempre davanti e Gino e Aldo restino sempre dietro a Ugo ?

La risposta è la seguente:

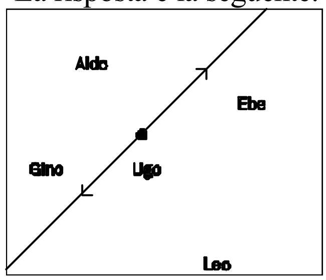
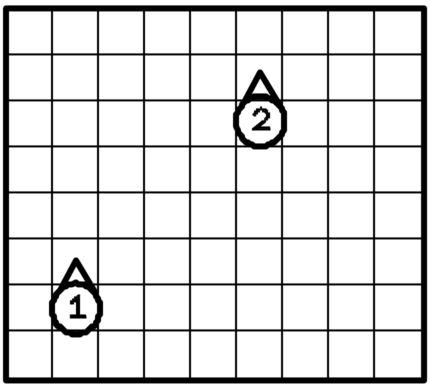


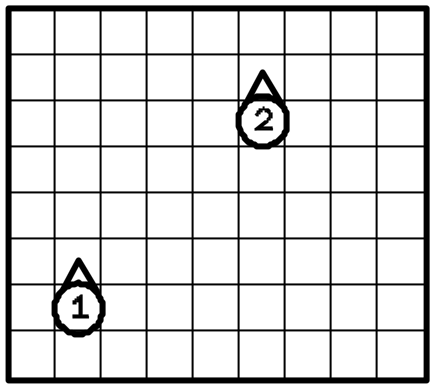
fig. 312

Dopo gli esercizi fatti attraverso il proprio corpo è indispensabile proporre anche delle schede:

Traccia i percorsi che iniziano dove sta il bambino 1 e terminano dove sta il bambino 2, seguendo i comandi di traslazione scritti a fianco:



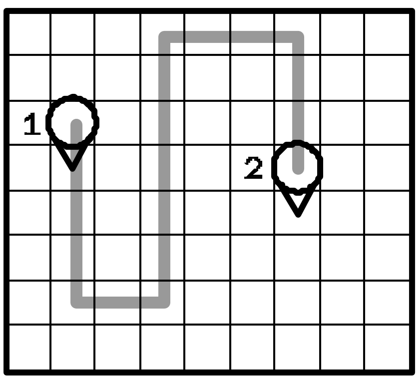
6 quadretti avanti
6 quadretti a destra
2 quadretti indietro
2 quadretti a sinistra



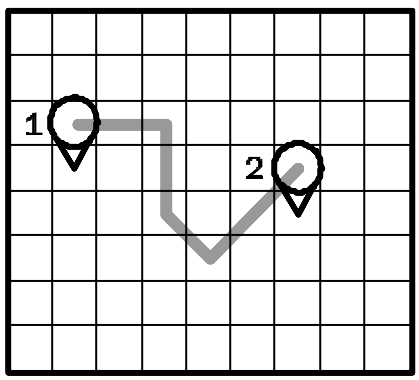
6 quadretti a destra
5 quadretti avanti a sinistra
3 quadretti a destra
1 quadretto indietro

fig. 313

Scrivi le traslazioni che vengono fatte partendo dal bambino 1 e terminando al bambino 2 mediante i percorsi segnati nei grafici:

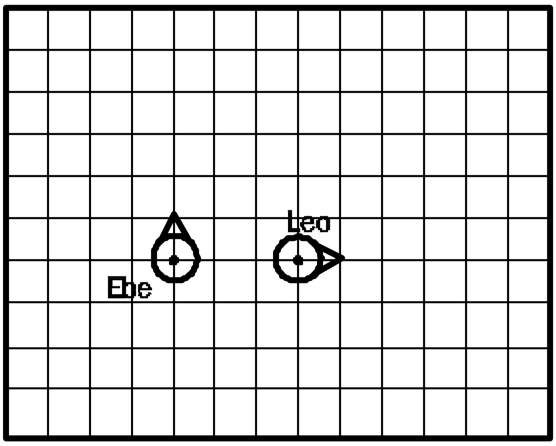


- 4 quadretti avanti
- ____________ ____________
- ____________ ____________
- ____________ ____________
- ____________ ____________



- 4 quadretti avanti
- ____________ ____________
- ____________ ____________ ____________
- ____________ ____________ ____________

fig. 314

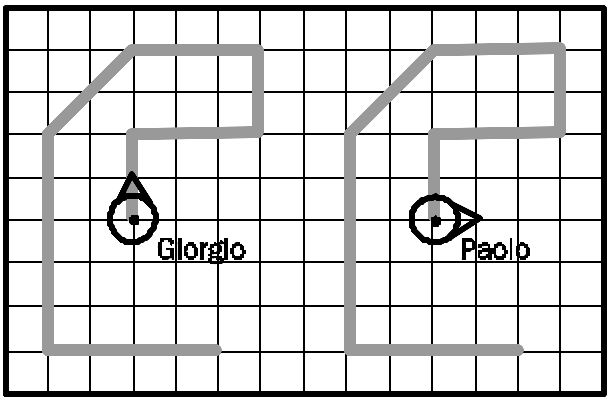


A differenza dei casi precedenti, Ebe e Leo si trovano sull'incrocio dei quadretti. Devono eseguire gli stessi comandi mantenendo le rispettive direzioni. Traccia i due percorsi seguendo i seguenti comandi.

Sequenza di traslazioni:
4 quadretti avanti
3 quadretti a destra
2 quadretti indietro
5 quadretti a sinistra
3 quadretti avanti

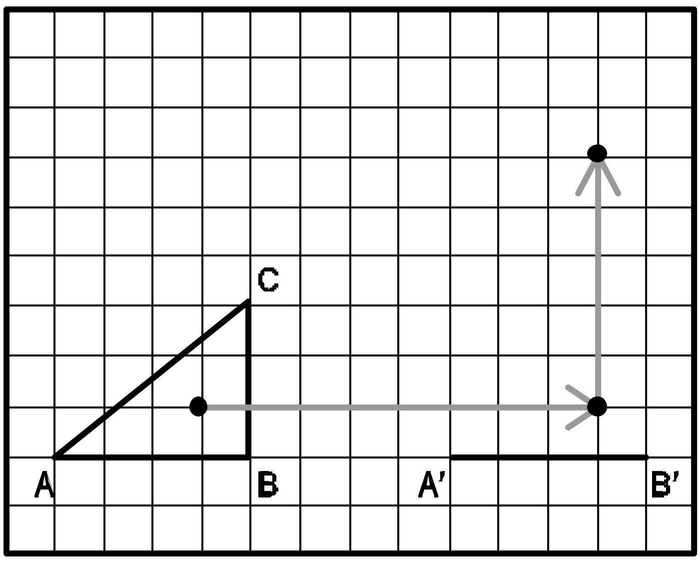
fig. 315

Descrivi i percorsi fatti da Giorgio e da Paolo senza cambiare la loro direzione.



PERCORSO DI GIORGIO	PERCORSO DI PAOLO
2 quadretti avanti	2 quadretti a sinistra
---------	---------
---------	---------
---------	---------
---------	---------
---------	---------
---------	---------

fig. 316



Le frecce indicano le due traslazioni (una di seguito all'altra) a cui deve essere sottoposto il triangolo ABC.

Disegna i due triangoli A'B'C' e A"B"C" che risultano dopo ciascuna di queste traslazioni.

fig. 317

Anche gli esercizi di traslazione fatti utilizzando il geopiano risultano interessanti:

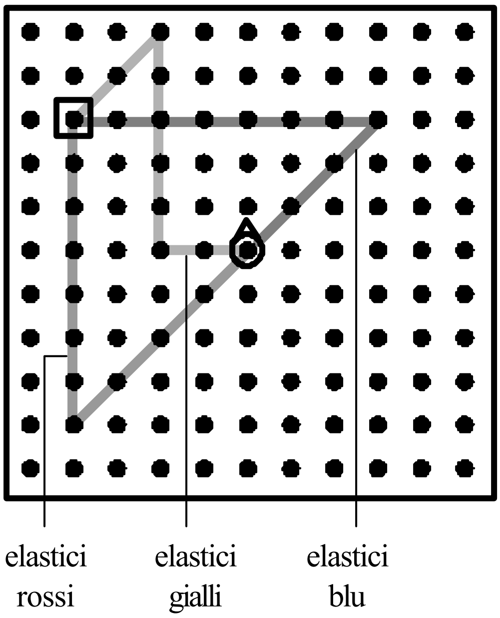


fig.318

Sul geopiano si pongono, infilati nei pioli, un cartoncino che rappresenta un bambino direzionato ed un cartoncino di forma quadrata. Con elastici di forma diversa li si collega simulando percorsi diversi.

Se il risultato è come quello disegnato nella figura sopra, le domande da porre al bambino possono essere le seguenti:
- Di quale colore è il percorso AVANTI A DESTRA e poi A SINISTRA?
- Descrivi il percorso indicato con l'elastico rosso.
- Di quale colore è il percorso con più traslazioni?
- Di quale colore è il percorso che contiene la traslazione INDIETRO A SINISTRA più corta?
- Il percorso indicato con l'elastico blu, se venisse fat-to al contrario, con quali comandi potrebbe essere eseguito?

Un altro tipo di esercizio consiste nel far pensare tracciati semplici senza eseguirli graficamente.

PROBLEMA:
Se vai AVANTI di 3 mattonelle, a DESTRA di 3 mattonelle, INDIETRO a SINISTRA di 3 mattonelle, ti ritrovi al punto di partenza?
PROBLEMA:
Se vai AVANTI a DESTRA di 4 mattonelle e poi INDIETRO a SINISTRA di 3 mattonelle, ti ritrovi al punto di partenza?
PROBLEMA:
Se vai AVANTI di 4 mattonelle, a DESTRA di 4 mattonelle, che comando devi eseguire per ritrovarti al punto di partenza?

Rotazioni attorno al proprio asse

Quando si esaminano le rotazioni attorno al proprio asse corporeo (varianza direzionale e invarianza posizionale) è necessario, più che in altri casi, partire dalle esperienze corporee perché implicano il possesso e l'uso spaziale corretto dei piani corporei trasversale e longitudinale.

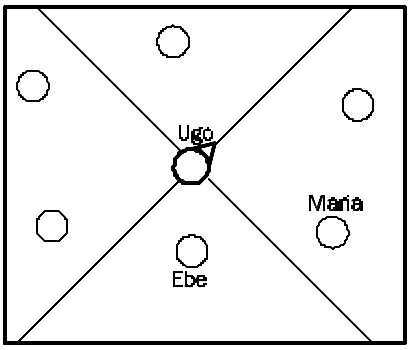


fig. 319

I bambini, liberi di muoversi, al comando di stop vengono a trovarsi come illustrato nel disegno. Alcune consegne per Ugo:

- *senza cambiare posizione direzionati in modo da avere Ebe davanti e Maria dietro di te;*
- *direzionati in modo che Maria si trovi alla tua destra ed Ebe alla tua sinistra;*
- *ruota in modo che sia Ebe sia Maria si trovino dietro e alla tua sinistra.*

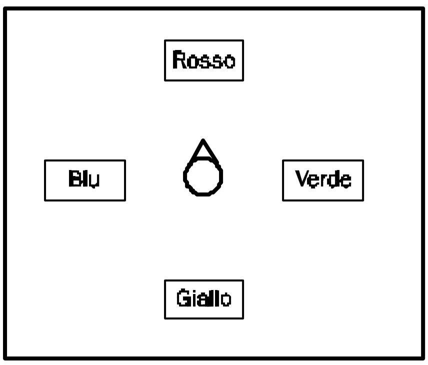


fig. 320

Il bambino si pone al centro di 4 mattoni colorati diversamente e disposti a croce. Si supponga che in partenza sia direzionato verso il mattone rosso. Alcune consegne:

- *con la rotazione più ampia direzionati verso il verde;*
- *ruota in modo da direzionarti il più vicino possibile al verde ma lasciando il giallo dietro di te;*
- *partendo dal rosso per dirigerti verso il blu fai una rotazione maggiore girando a sinistra o girando a destra?*

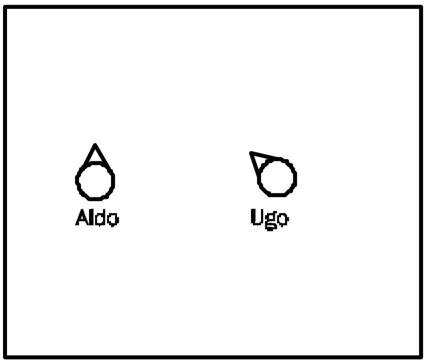


fig. 321

Aldo e Ugo sono posizionati in modo diverso.

- *Come devono ruotare per trovarsi uno di fronte all'altro?*
- *E' possibile ottenere questo facendo eseguire ad entrambi solo rotazioni a destra?*
- *Se sì, chi dei due ruota di più?*

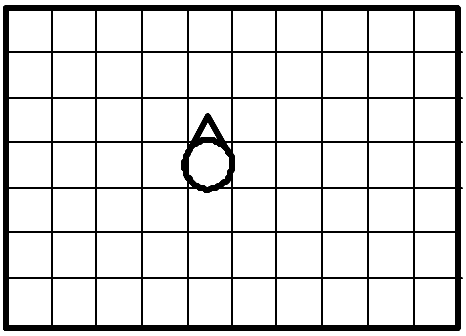
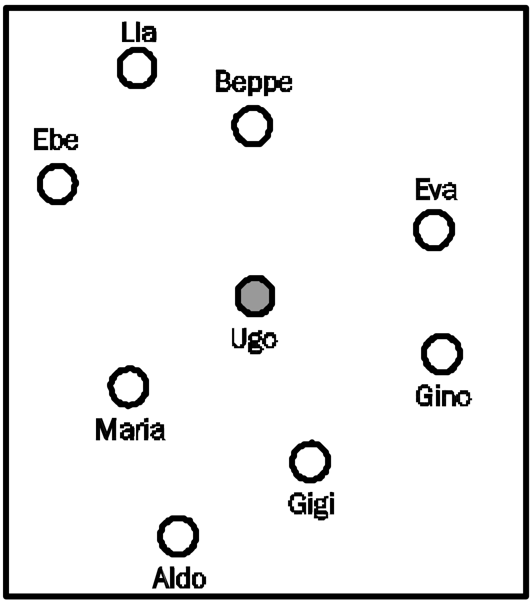


fig. 322

Il bambino, posizionato su una mattonella del pavimento, assume una direzione conforme alle linee della pavimentazione e può fare solo rotazioni ad angolo retto.

- *Se ruoti 3 volte a destra oppure una volta a sinistra alla fine ti trovi direzionato nello stesso modo?*
- *E se ruoti due volte a destra oppure due volte a sinistra?*

A livello grafico è possibile proporre schede di questo tipo:



Il disegno a fianco riproduce le posizioni che gli alunni hanno assunto nell'aula.
Ugo si trova al centro del gruppo, ma è stato indicato senza alcuna direzione.

Disegna nella tabella sottostante la direzione di Ugo in modo che siano soddisfatte le condizioni indicate:

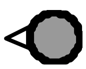
	Ebe e Maria davanti	Maria davanti e Ebe dietro	Beppe davanti e Eva dietro	Gino a destra e Gigi a sinistra	Maria e Beppe a sinistra
Direzione di Ugo in modo che abbia:					

fig. 323

Successioni di traslazioni e di rotazioni

I percorsi effettuati solo con traslazioni appaiono ai bambini molto spesso innaturali, infatti lo spostamento laterale mantenendo la direzione di partenza crea delle difficoltà motorie. I percorsi effettuati negli esercizi sulle traslazioni possono essere riproposti utilizzando cambiamenti successivi di posizione e di direzione.

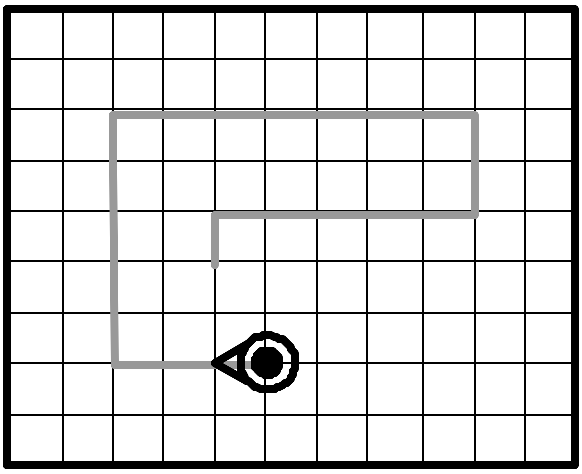


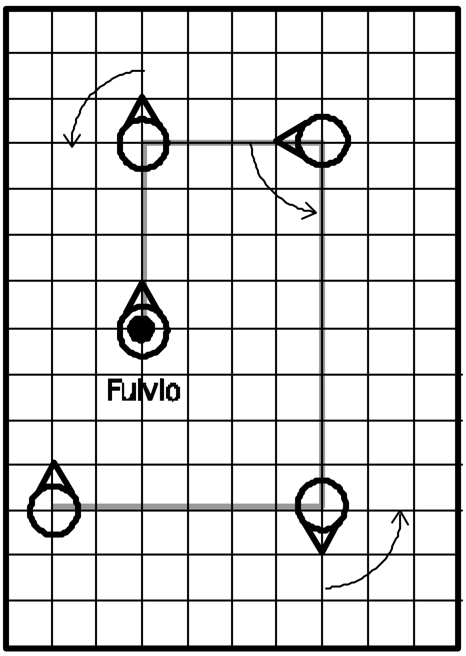
fig. 324

Sul pavimento viene segnato un percorso con delle corde. Il bambino deve compiere il percorso usando come traslazione solo quella dell'AVANZARE e come rotazione quelle A DESTRA o A SINISTRA (ma di un angolo retto). Il tutto deve essere verbalizzato.
La risposta sarà:

3 mattoni avanti, ruoto a destra,
5 mattoni avanti, ruoto a destra,
7 mattoni avanti, ruoto a destra,
2 mattoni avanti, ruoto a destra,
5 mattoni avanti, ruoto a sinistra,
1 mattone avanti.

Se la traslazione concessa fosse stata INDIETREGGIARE allora la risposta sarebbe stata:

Ruoto 2 volte a destra, 3 mattoni indietro, ruoto a destra, 5 mattoni indietro,
ruoto a destra, 7 mattoni indietro, ruoto a destra, 2 mattoni indietro,
ruoto a destra, 5 mattoni indietro, ruoto a sinistra, 1 mattone indietro.



Fulvio compie il percorso disegnato a fianco, alla fine di ogni traslazione compie una rotazione a destra o a sinistra (come rappresentato dalle frecce disegnate).

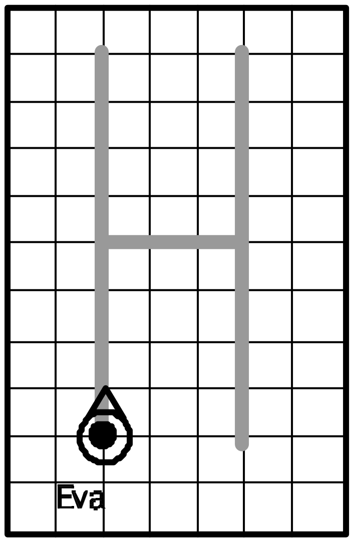
Usando:

A ... = avanzare di ... mattonelle
I ... = indietreggiare di ... mattonelle
RD = ruotare a destra
RS = ruotare a sinistra

completa la tabella sottostante:

	Comandi						
	A 4	RS					
Fulvio cambia POSIZIONE	si	no					
Fulvio cambia DIREZIONE	no	si					

fig. 325



Eva deve percorrere il tracciato della lettera H. Quale dei seguenti 3 percorsi è quello errato ? ________________

1° percorso	2° percorso	3° percorso
A 7	A 7	A 7
I 3	I 3	I 3
RS	RD	RD
I 3	A 3	A 3
RD	RD	RD
A 3	I 4	A 4
I 7	A 7	I 7

fig. 326

Spostamenti curvilinei

Sono trasformazioni in cui variano sia la posizione sia la direzione.

Nell'esempio sotto raffigurato, Emilio deve raggiungere Ugo seguendo il percorso indicato con la corda. Ad ogni passo Emilio, oltre che cambiare di posizione, deve anche cambiare di direzione.

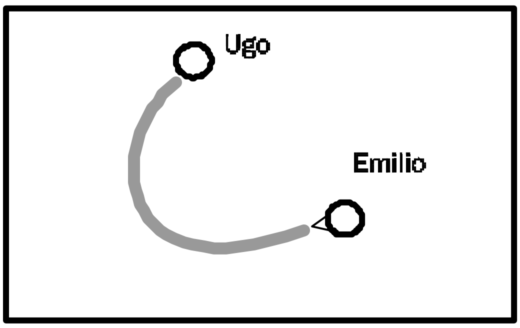


fig. 327

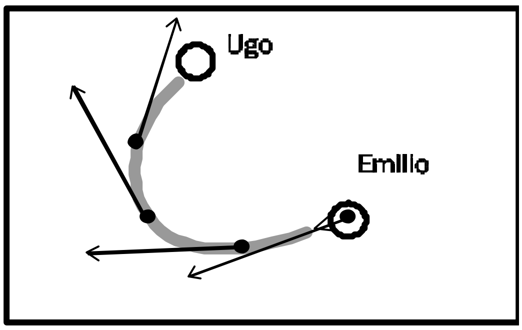
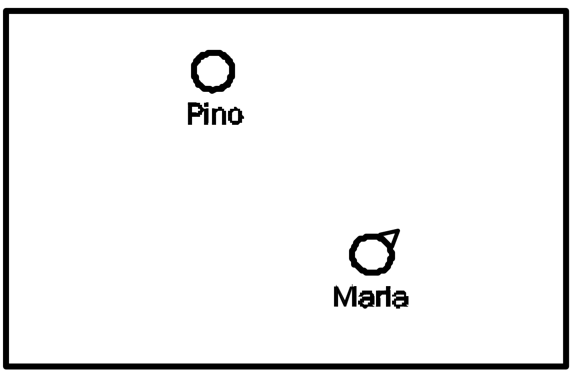


fig. 328

Mentre Emilio fa il percorso deve an-che verbalizzare tali cambiamenti in mo-do da evidenziare che non si tratta di una traslazione e neppure di una sem-plice rotazione.

Altri esercizi corporei consistono nel far eseguire percorsi che soddisfino determinate consegne dell'insegnante e non siano guidati da corde posizionate per terra.
Maria deve raggiungere Pino con due percorsi diversi:
- senza traslazioni né rotazioni ma solo con curvatura sempre a destra;
- come il precedente ma solo con curvatura a sinistra:



Possibili soluzioni

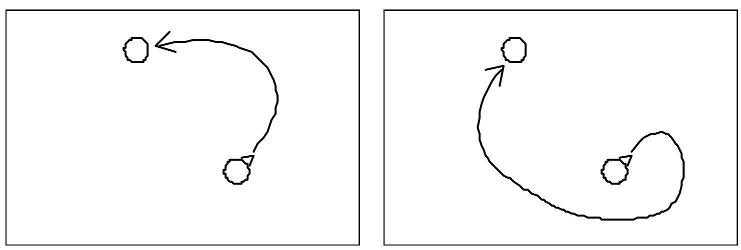
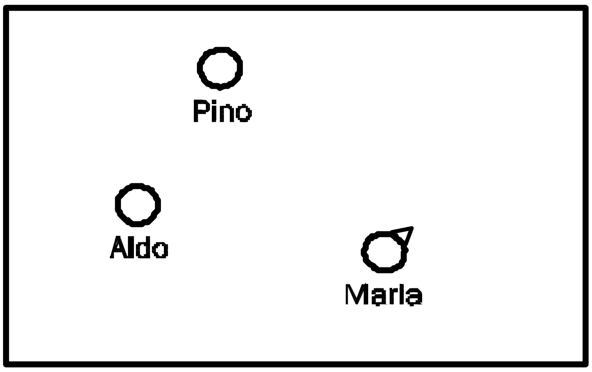


fig. 329

Altro esercizio: Maria, so-lo con un percorso con curvatura sempre a sini-stra, deve raggiungere Pino passando prima da Aldo.



possibile soluzione:

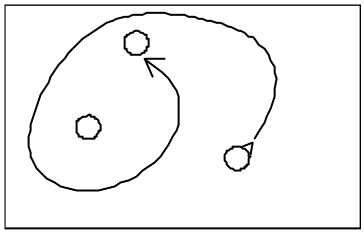
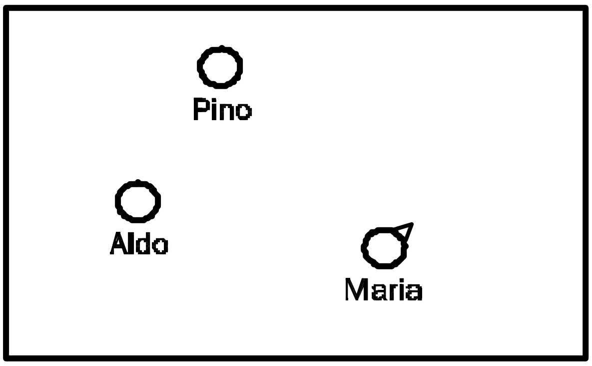


fig. 330

Maria deve raggiungere Pino con un percorso: con curvatura a destra fino ad Aldo e con curvatura a sinistra dopo Aldo.



possibile soluzione:

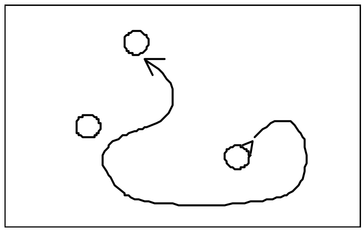
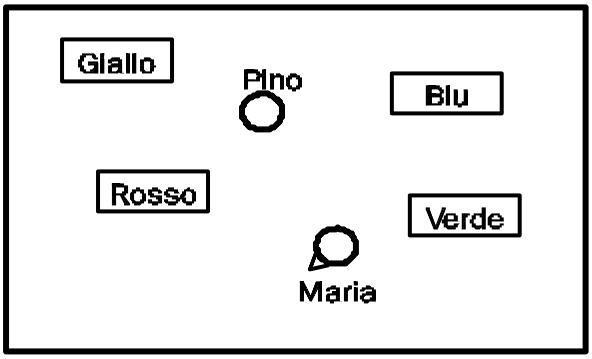


fig. 331

Maria deve raggiungere Pino con un percorso con curvatura a scelta, ma che lasci i mattoni rosso e blu a destra e i mattoni verde e giallo a sinistra.



possibile soluzione:

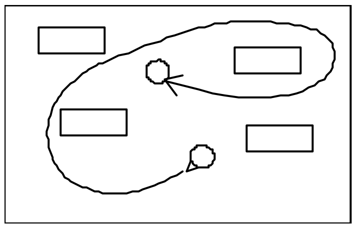
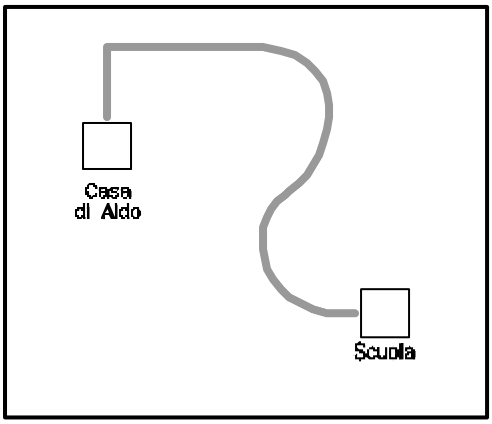


fig. 332

Schede che contemplino i tre tipi di trasformazioni possono essere come le seguenti:

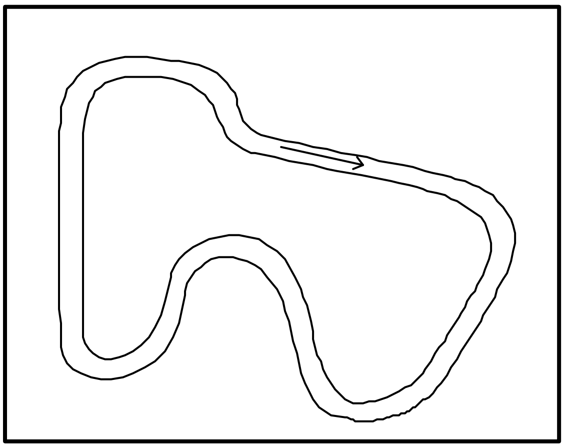


Nel grafico è rappresentato il percorso stra-dale che Aldo deve fare per recarsi ogni mat-tina a scuola.

Colora di:

VERDE	le traslazioni,
ROSSO	le curvature a sinistra,
GIALLO	le curvature a destra,
BLU	il punto di sola rotazione.

fig. 333



Nel grafico è rappresentata la pista di un autodromo.
Tale pista è percorsa dalle macchine da corsa secondo il verso indicato dalla freccia.

Colora di:
- VERDE le traslazioni,
- ROSSO le curvature a sinistra
- GIALLO le curvature a destra.

fig. 334

Anche esercizi manipolatori di piegatura del filo di ferro aiutano ad interiorizzare e distinguere meglio i tre tipi di trasformazioni. Piega il filo di ferro in modo da ottenere:
1° tratto - rettilineo; 2° tratto - curvo a destra; 3° tratto - curvo a sinistra; 4° punto - di rotazione a destra; 5° tratto - rettilineo.

TRASFORMAZIONI DI CONCAVITA'-CONVESSITA' E DI FORMA

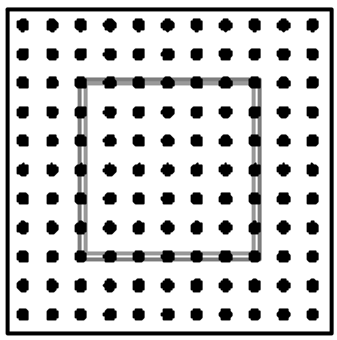
Nelle trasformazioni che riguardano le regioni del piano è necessario mostrare al bambino la figura di partenza e la figura di arrivo collocate contemporaneamente sullo stesso piano.
Quindi, se le trasformazioni sono di forma rappresentate con cartoncini, al bambino vengono consegnati due cartoncini colorati e quadrettati di una determinata forma perfettamente uguali. Il bambino, dopo aver riportato la consegna inerente la trasformazione da effettuare all'inizio del foglio, sotto incollerà uno dei cartoncini, mentre con il secondo effettuerà la trasformazione. Il risultato finale verrà incollato sulla stessa pagina.

fig. 335

Nella pagina a fronte il bambino descriverà le operazioni compiute per effettuare la trasformazione e, di seguito, registrerà le invarianze e le varianze.

Lavorando sul geopiano le due figure, di partenza e di arrivo, devono avere il confine formato da elastici di diverso colore.

Prima della trasformazione



Alla fine della trasformazione

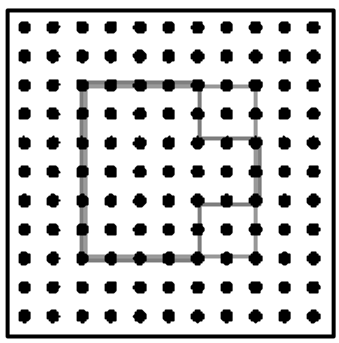


fig. 336

Trasformazioni compiute su forme di cartoncino con forbici e nastro adesivo

Al bambino vengono consegnati due cartoncini perfettamente uguali.

Il bambino scriverà il testo del problema, dettato dal maestro, in alto nella pagina sinistra del quaderno. Poi incollerà un cartoncino e l'altro lo elaborerà ritagliandone (o incollandone) delle parti. Alla fine incollerà l'elaborazione ottenuta sotto la precedente forma e inizierà il lavoro di registrazione di quanto fatto e delle varianze-invarianze della trasformazione.

ESEMPIO.:
Trasforma il cartoncino rettangolare in uno pentagonale che mantenga la convessità e la lunghezza di due lati.

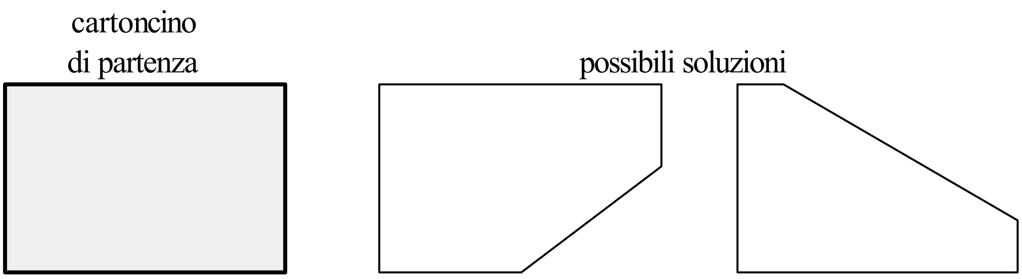


fig. 337

Il lavoro fatto e registrato sul quaderno risulterà:

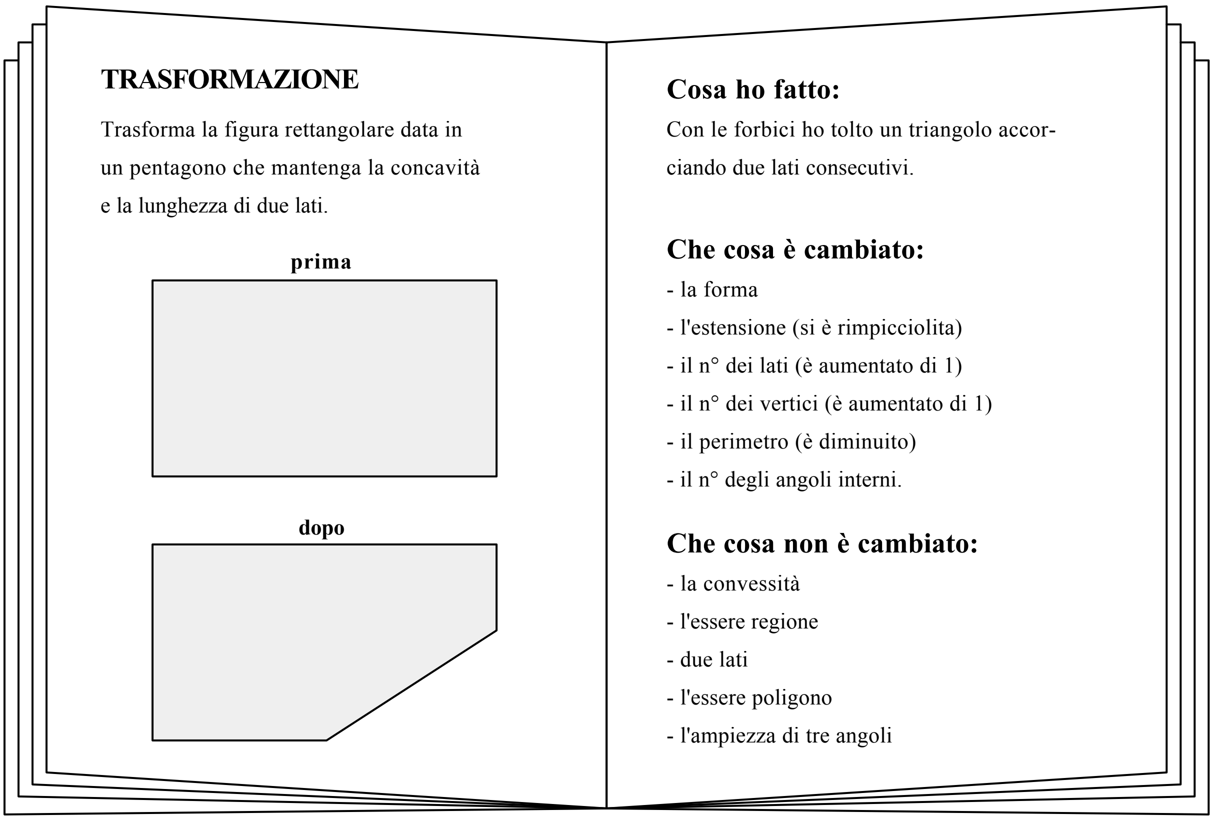


fig. 338

Analogamente:

Togliendo una parte, trasforma un cartoncino rettangolare in pentagono concavo mantenendo la lunghezza di tre lati.

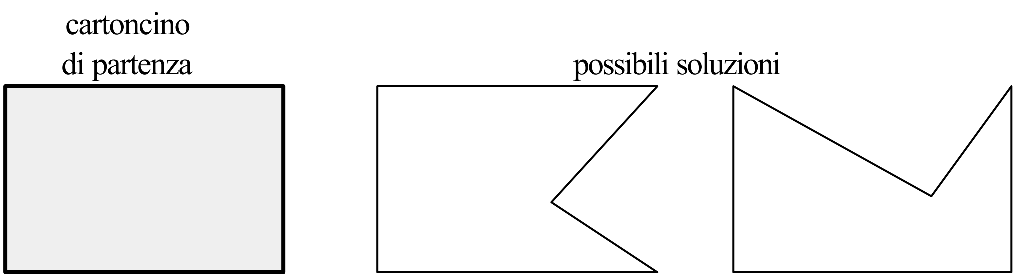


fig. 339

Aggiungendo altro cartoncino alla forma rettangolare data, trasforma la figura di partenza in un esagono concavo.

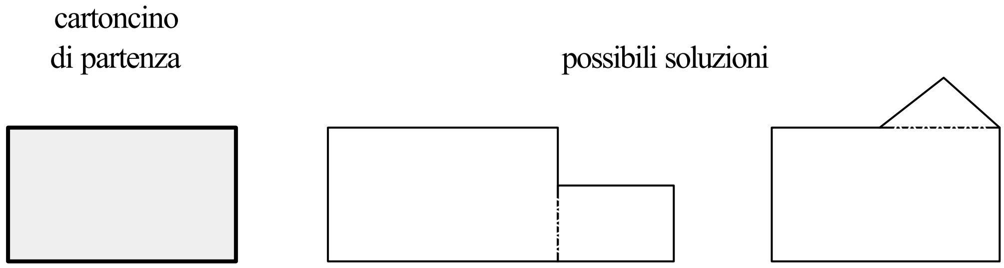


fig. 340

Togliendo con un solo taglio una parte della forma pentagonale concava data, trasformala in un quadrilatero convesso.

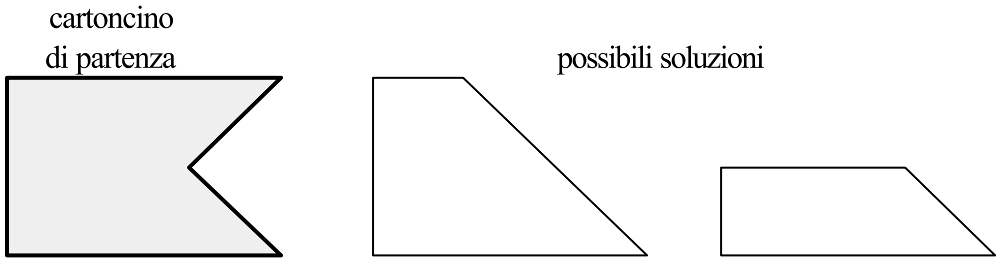


fig. 341

Togliendo una parte della forma esagonale convessa data, trasformala in un esagono concavo.

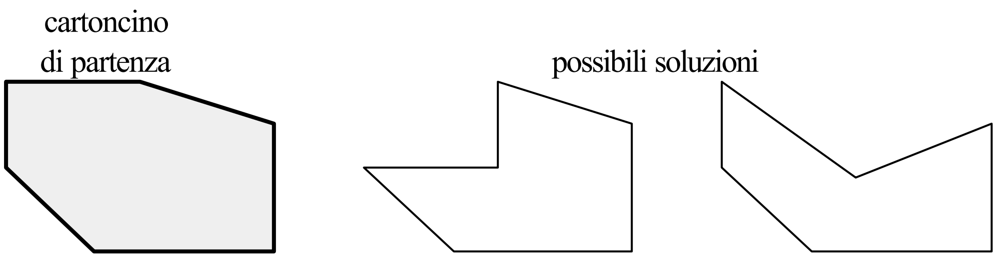


fig. 342

Togliendo una o più parti, trasforma la forma rettangolare data in una figura concava con la frontiera curvilinea.

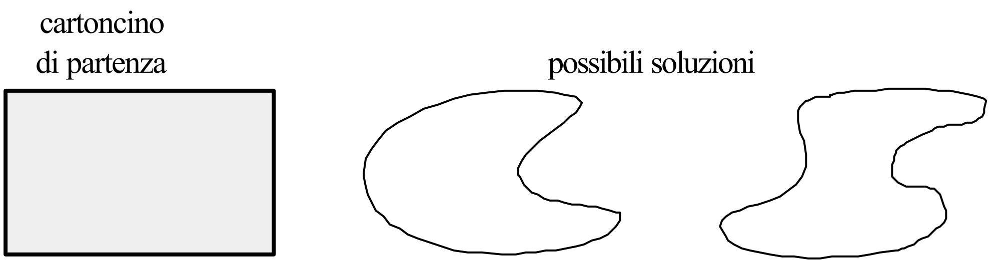


fig. 343

Si possono proporre esercizi inversi: data la figura di partenza e quella di arrivo, il bambino deve scoprire la consegna che ha permesso la trasformazione.
Esercizi analoghi si possono eseguire sul geopiano (esclusi quelli con frontiere curvilinee).

TRASFORMAZIONI DEI PERIMETRI

Sono trasformazioni analoghe alle precedenti, ma le consegne riguardano esplicitamente il perimetro.
Esempi di esercizi:

Togliendo una parte del rettangolo, trasformalo in un altro rettangolo avente 2p minore.

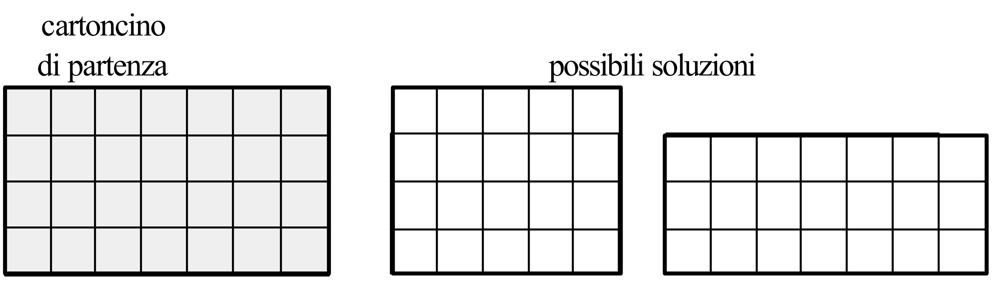


fig. 344

Ritagliando una parte e incollandola poi, trasforma il quadrato in un rettangolo avente 2p maggiore.

cartoncino di partenza

possibile soluzione

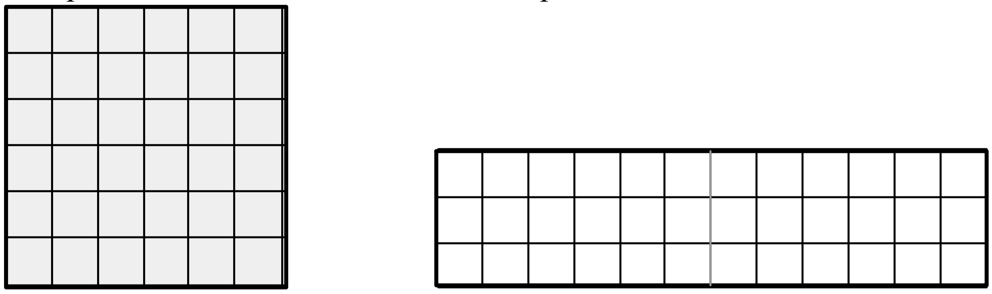


fig. 345

Togliendo una parte del rettangolo, trasformalo in un poligono concavo avente 2p maggiore.

cartoncino di partenza

possibili soluzioni

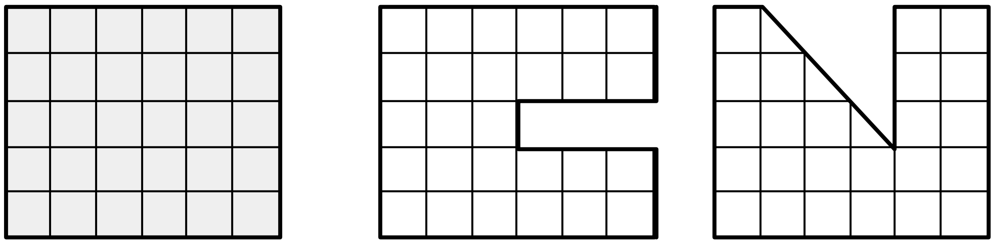


fig. 346

Parti da una forma rettangolare e ritagliala in una forma a pettine. Registra tutto ciò che riguarda la trasformazione effettuata e rispondi: "Estensione e perimetro cambiano allo stesso modo?"

cartoncino di partenza

possibili soluzioni

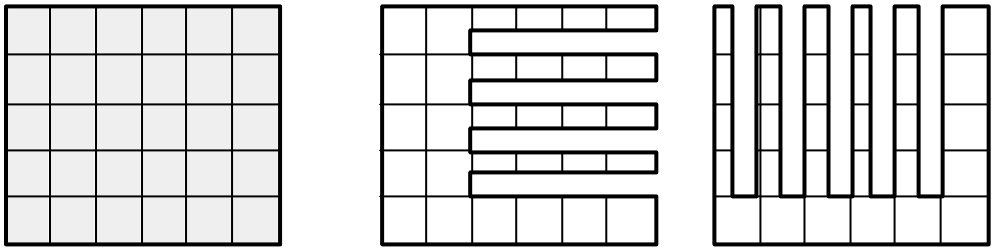


fig. 347

Togliendo dalla forma rettangolare una parte, trasformala in un esagono concavo che mantenga lo stesso 2p.

cartoncino di partenza

possibili soluzioni

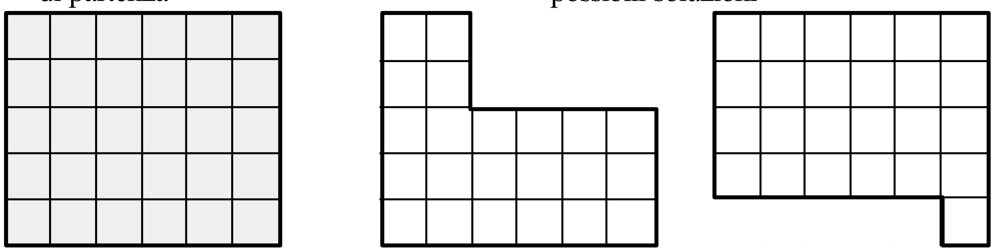


fig. 348

Scopri la consegna che permette la trasformazione data e indica se il 2p è rimasto uguale.

cartoncino di partenza

cartoncino di arrivo

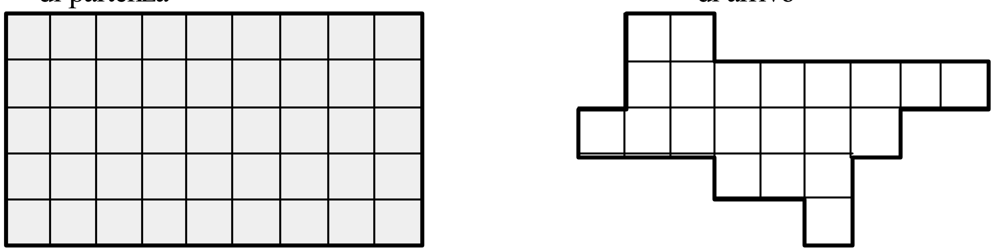


fig. 349

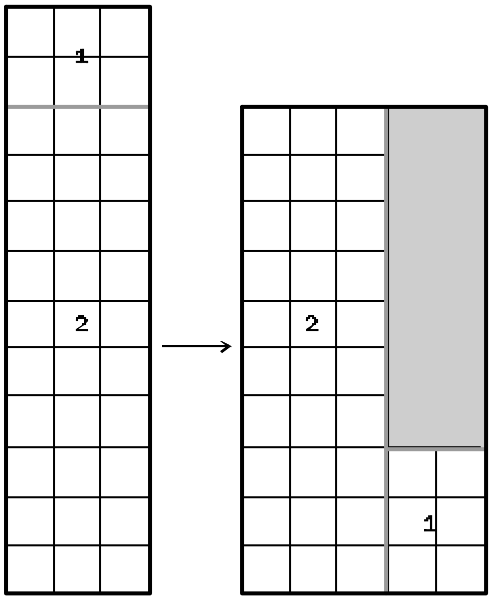


fig. 350

La trasformazione è stata ottenuta ritagliando la parte (1) del rettangolo di partenza, incollandola a fianco della parte rimasta (2) ed aggiungendo la parte ombreggiata.

Si chiede al bambino di scoprire la consegna che ha permesso la trasformazione e di rispondere alle domande:

"*Le due figure hanno la stessa estensione?*"
"*Hanno lo stesso 2p?*"

Trasformazioni sul geopiano

Sul geopiano si costruisce un triangolo rettangolo isoscele ABC.

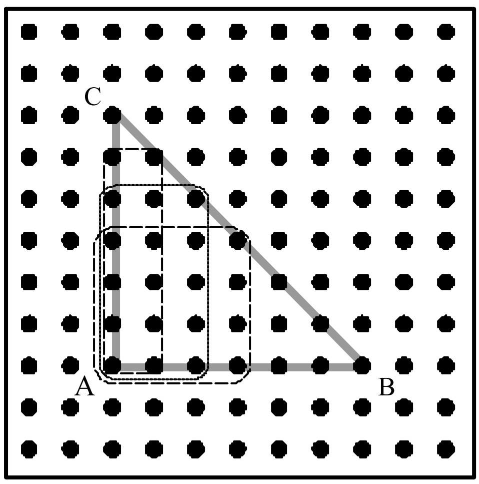


fig. 351

Si chiede ai bambini di costruire, con elastici di colore diverso, rettangoli che soddisfino tutte le seguenti condizioni:
- un vertice in A;
- un vertice sul cateto AB;
- un vertice sul cateto AC;
- un vertice sull'ipotenusa BC;

Domande:
- *I rettangoli costruiti hanno la stessa estensione?*
- *I rettangoli costruiti hanno lo stesso perimetro?*

Per rispondere più facilmente alla seconda domanda, i bambini dovrebbero lavorare sul semiperimetro nel seguente modo: accorcio di 1 l'altezza del rettangolo e aumento di 1 la base; il semiperimetro non cambia, pertanto il rettangolo ottenuto mantiene lo stesso 2p del rettangolo di partenza.

Trasformazioni sui fili

Si prenda un filo di rame e si uniscano le estremità in modo da formare un anello del diametro di 15 cm circa. La forma circolare ottenuta viene riportata sul quaderno seguendo con la matita il contorno del-l'anello. Si chiede poi al bambino di creare una concavità piegando una parte del filo di rame verso l'interno. Il bambino sovrappone il risultato alla forma precedente rilevando la diminuzione dell'estensione e poi traccia la nuova forma ottenuta.
Analogamente si procede creando nuove concavità, confrontando e registrando di volta in volta i risultati ottenuti.

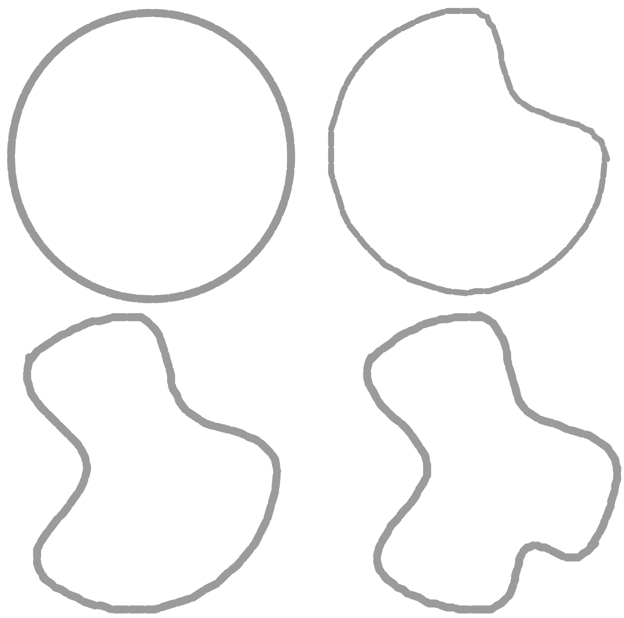


fig. 352

Si viene a formare sul quaderno una sequenza di trasformazioni e il bambino dovrà scoprire e scrivere

le invarianze e le varianze di ogni trasformazione.
RIASSUMENDO: ad ogni trasformazione:
- *l'estensione diminuisce,*
- *il numero di concavità aumenta,*
- *il perimetro rimane costante.*

Con lo stesso procedimento si propone il percorso inverso partendo da una figura con tante concavità e trasformandola via via fino ad ottenere una figura convessa.

Trasformazioni sugli accostamenti

Si prendano due cartoncini uguali di forma rettangolare e si accostino le basi in modo da formare un nuovo rettangolo che viene registrato sul quaderno seguendone il contorno.

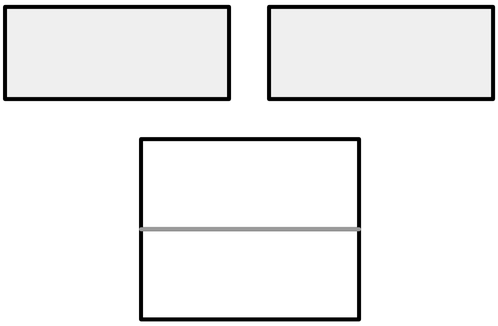


fig. 353

Un cartoncino viene fatto slittare in maniera da ottenere un nuovo poligono, che viene a sua volta riportato a fianco del rettangolo precedentemente tracciato. Si chiede al bambino di indicare le invarianze e le varianze (l'estensione è la stessa, sono state create due concavità, è diventato un ottagono, è aumentato il perimetro).
Si fa ulteriormente slittare il cartoncino e così via disegnando di volta in volta le forme ottenute.

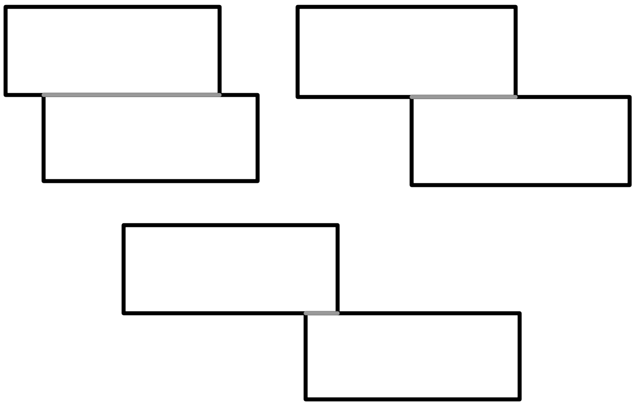


fig. 354

Si può riassumere la sequenza delle trasformazioni dicendo che *il perimetro via via aumenta, mentre l'estensione rimane costante*.

Giochi analoghi si possono proporre usando forme diverse dal rettangolo e con più di due forme, ad esempio con il TANGRAM.

Trasformazioni con piegatura

Si danno al bambino due foglietti rettangolari uguali. Un foglietto viene incollato sul quaderno, l'altro si trasforma ripiegando un vertice verso l'interno e ritagliando lungo la parte dei lati che si sovrappone al rettangolo.

L'esagono concavo ottenuto ha lo stesso 2p della figura di partenza?

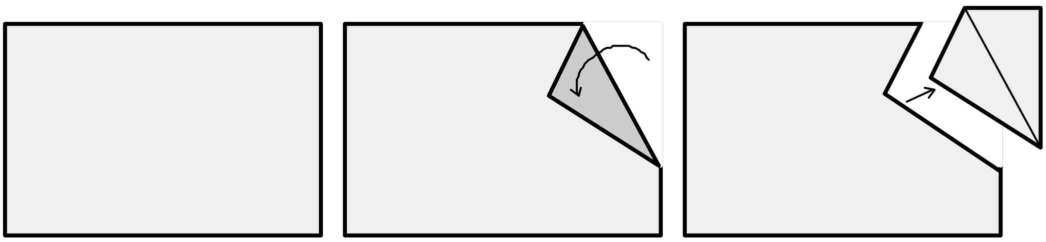


fig. 355

Si può effettuare lo stesso esercizio partendo da una forma circolare.

La luna piena e la luna calante hanno lo stesso perimetro?

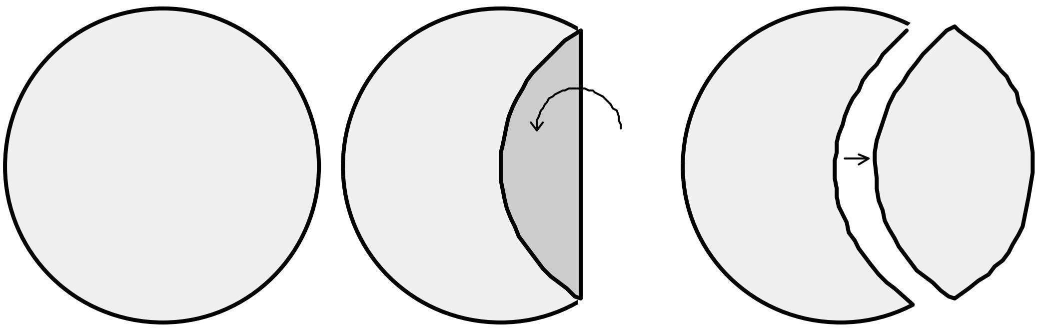


fig. 356

16.
CALCOLO DELLE AREE

LE TRASFORMAZIONI DI EQUIESTENSIONE

Le TRASFORMAZIONI DI EQUIESTENSIONE permettono di mutare una superficie in un'altra senza cambiarne l'area.

Nelle trasformazioni precedenti l'estensione delle figure è stata considerata in maniera intuitiva perchè l'obiettivo era quello di puntualizzare il perimetro. Nelle trasformazioni successive si puntualizzerà il concetto di area e verranno utilizzate procedure simili a quelle finora esposte.
Le esperienze di trasformazione che diminuiscono l'area (asportando una parte della figura) e quelle che la aumentano (aggiungendo altro cartoncino alla figura di partenza) sono facilmente intuibili e sono già state effettuate negli esercizi precedenti. Le trasformazioni di equiestensione presentano maggiori difficoltà e richiedono esperienze specifiche.

Utilizzando forbici e nastro adesivo, una figura può essere divisa in due o più parti e ricomposta in modo da ottenere forme diverse ma equiestese.
Le consegne delle varianze e delle invarianze delle trasformazioni devono essere date al bambino sotto forma di testo di un problema. La soluzione manuale del problema deve essere sempre seguita dalle classificazioni scritte dei risultati.

Data una forma rettangolare, trasformala in un esagono concavo equiesteso al rettangolo di partenza.

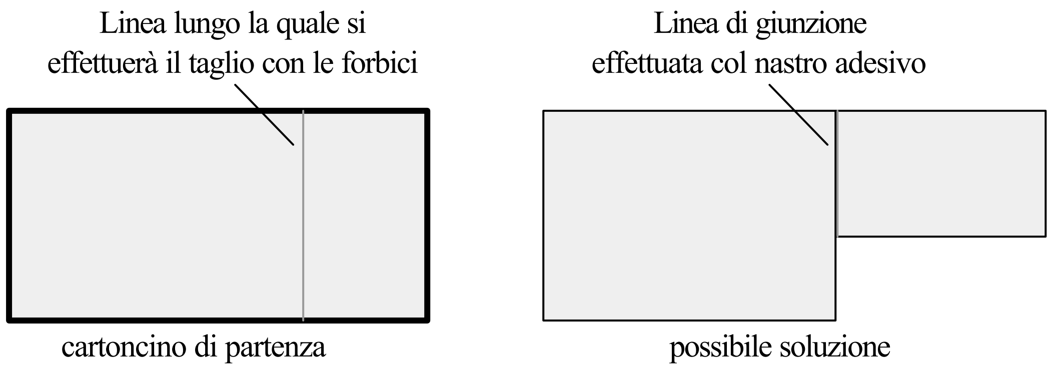


fig. 357

LE VARIANZE SONO: - la forma - il numero dei vertici - il numero dei lati - la convessità - il perimetro

LE INVARIANZE SONO: - l'essere regione - l'essere poligono - l'area - la vertico-orizzontalità dei lati

Data una forma rettangolare, trasformala in una ottagonale equiestesa a quella di partenza.

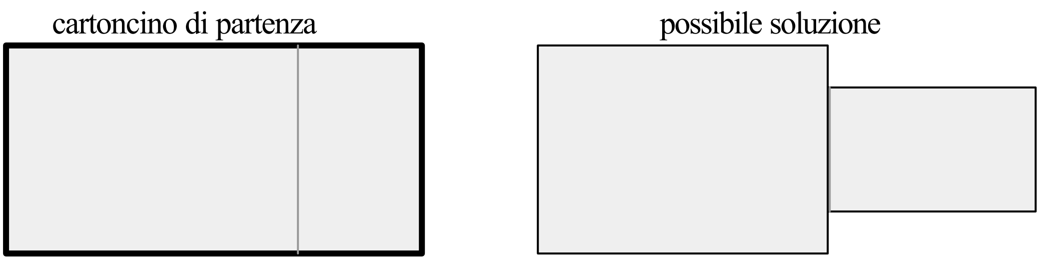


fig. 358

trasforma la figura data in un rettangolo.

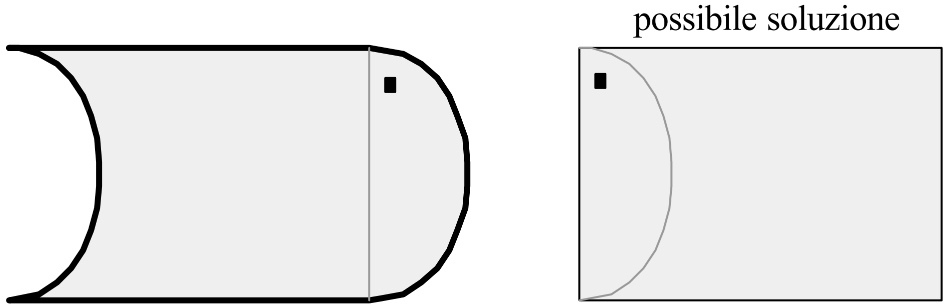


fig. 359

Dato un cartoncino a forma di triangolo rettangolo, trasformalo in una forma rettangolare equiestesa.

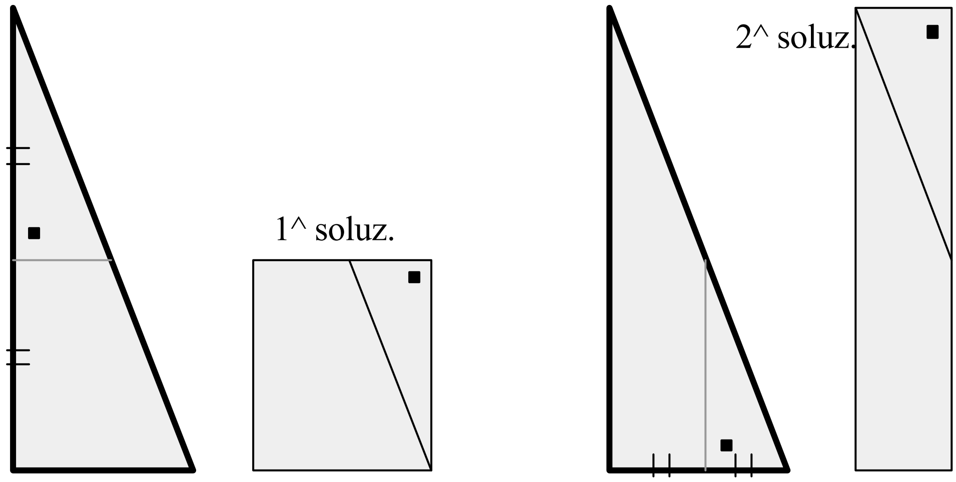


fig. 360

Data una forma romboidale, trasformala in una forma rettangolare equiestesa.

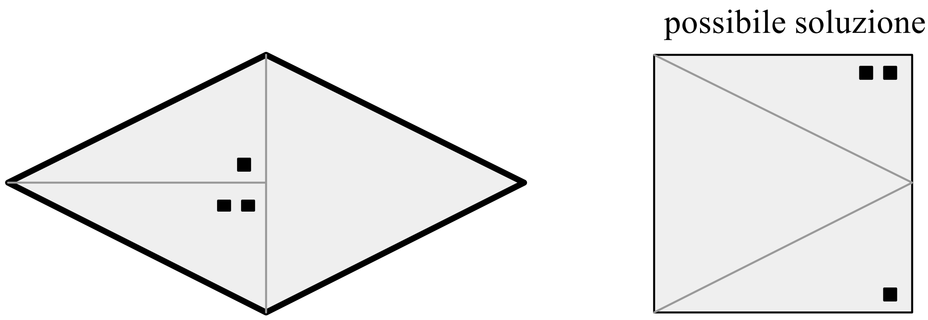


fig. 361

Data una forma rettangolare, trasformala in una forma a triangolo rettangolo equiestesa.

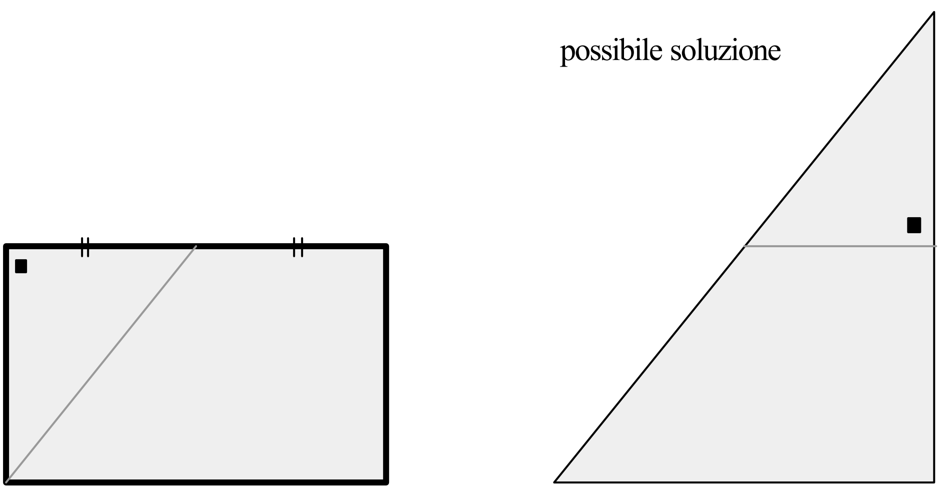


fig. 362

Data una forma rettangolare, trasformala in una forma a triangolo isoscele equiestesa.

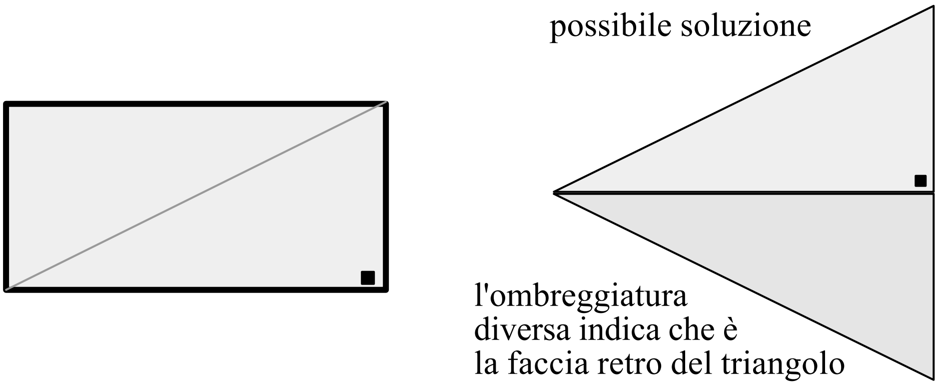


fig. 363

Trasforma la figura data in una forma rettangolare equiestesa.

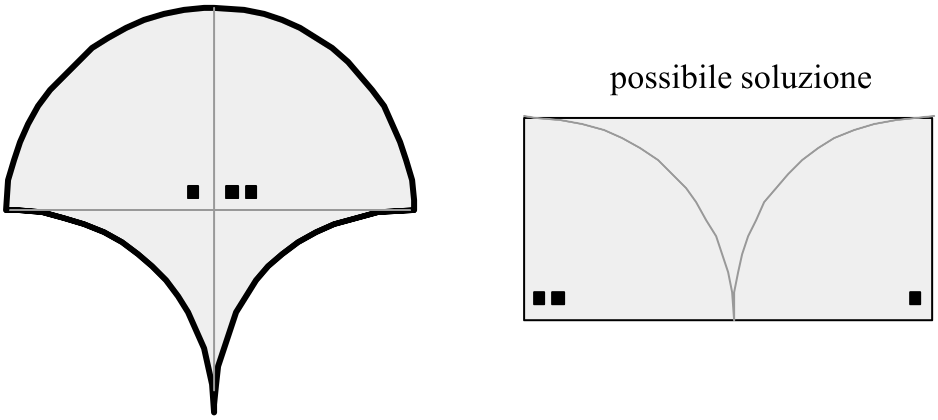


fig. 364

Trasforma la figura data in una forma quadrata equiestesa.

Per rendere più facile questa trasformazione piuttosto complessa, è opportuno che l'insegnante tratteggi sulla figura data le parti da ritagliare.

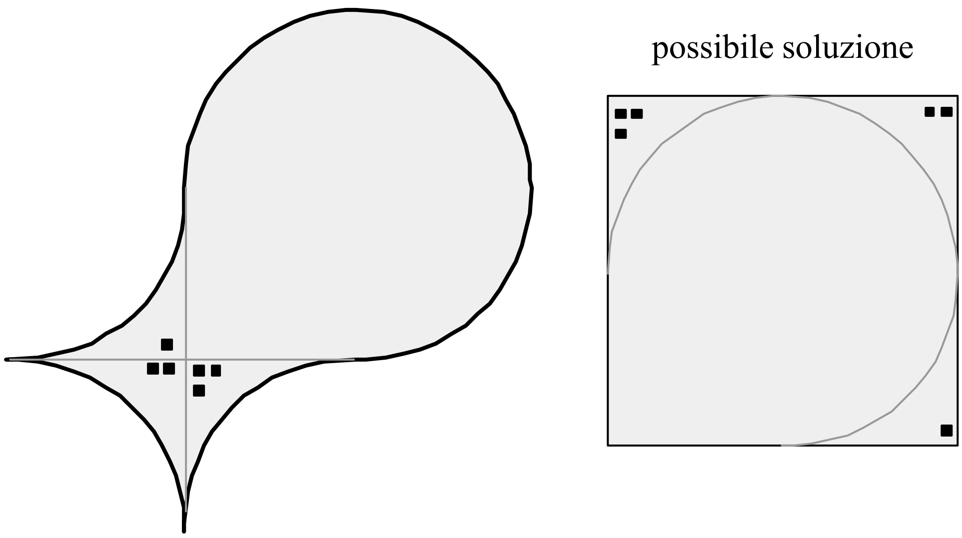


fig. 365

Trasforma una figura rettangolare in una forma a parallelo-grammo equiestesa.

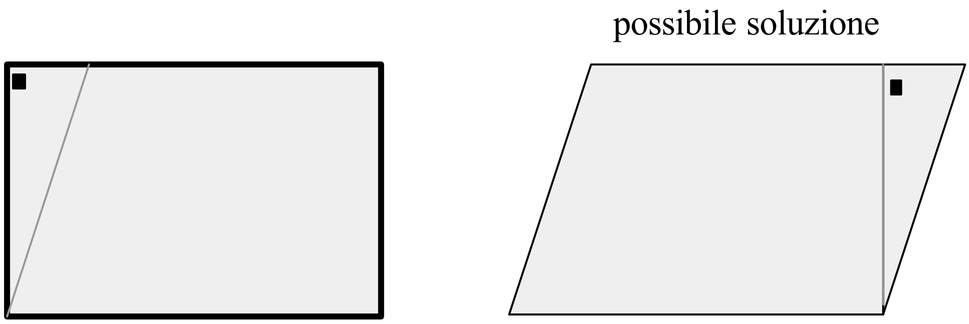


fig. 366

Trasforma una figura a trapezio isoscele in una forma a parallelogram-mo equiestesa.

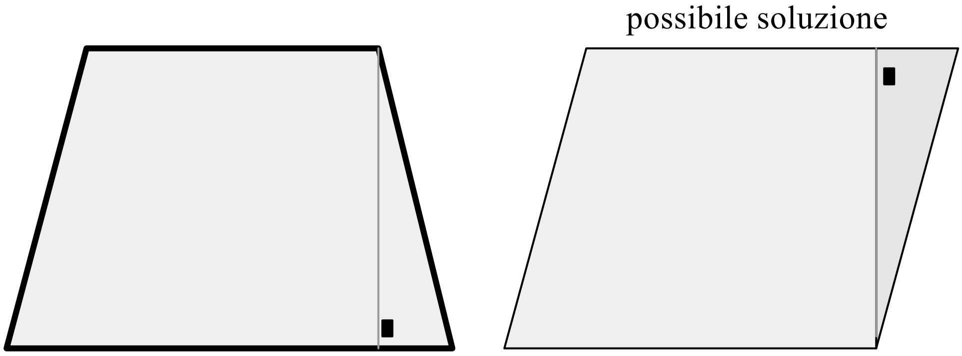


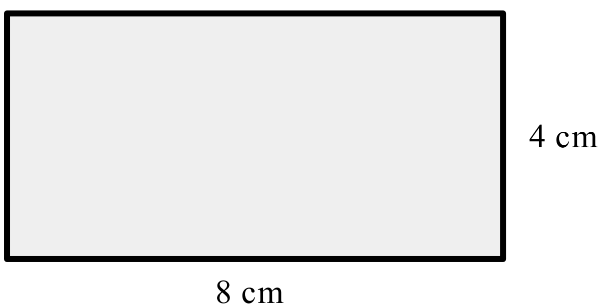
fig. 367

TRASFORMAZIONI DEI POLIGONI PIU' NOTI IN RETTANGOLI

Le trasformazioni di equiestensione risultano particolarmente utili per scoprire e comprendere le formule usate per il calcolo dell'area dei poligoni più comuni. Finora il bambino ha trovato l'area delle regioni ricorrendo al ricoprimento per mezzo dei campioni quadrati. Non tutte le figure sono perfettamente ricopribili (figure con frontiere in obliquità, figure con frontiere curvilinee), pertanto, per misurare la loro estensione, o si procede a trasformazioni in figure equiestese ma ricopribili, o si procede per appros-simazione.

Nel caso delle figure poligonali, è sempre possibile trasformarle in figure rettangolari equiestese e quindi ricopribili. Questo fatto, oltre a permettere di trovare l'area, consente anche di scoprire le leggi del calcolo dell'area partendo dalla legge fondamentale riguar-dante i rettangoli:

> *"l'area di un rettangolo si ottiene moltiplicando la quantità dei quadrati che si possono appoggiare sulla base per il numero delle volte corrispondente alla misura dell'altezza".*



$$\text{Area} = \text{cm}^2\ 8 \times 4 \text{ volte} = $$
$$= \text{cm}^2\ (8 \times 4) = \text{cm}^2\ 32$$

generalizzando:

$$\text{Area} = \text{cm}^2\,(\text{base}) \times (\text{altezza}) \text{ volte} =$$
$$= \text{cm}^2\,(\text{base} \times \text{altezza})$$

in simboli:

$$\boxed{\text{Area}_r = \text{unità}^2\,(b_r \times h_r)}$$

Si esamineranno ora le trasformazioni di equiesten-sione dei poligoni più comuni in rettangoli e in particolare:

- PARALLELOGRAMMO;
- TRIANGOLO ACUTANGOLO;
- TRIANGOLO OTTUSANGOLO;
- ROMBO;
- TRAPEZIO;
- POLIGONO CON UN NUMERO DISPARI DI LATI;
- POLIGONO CON UN NUMERO PARI DI LATI.

La metodologia usata è sempre la stessa, sul quaderno si riportano: il testo della trasformazione, il cartoncino di partenza, il cartoncino d'arrivo, le diverse considerazioni e le conclusioni sollecitate dall'insegnante.
Le conclusioni riguardanti le varianze e le invarianze degli elementi geometrici devono essere espresse con il simbolo di uguaglianza. In particolare:

$$XX_{inizio} = XX_{fine}$$

significa che XX non è variata, mentre:

$$XX_{inizio} = XX_{fine} / 2$$

significa che XX è variata e, precisamente, si è raddoppiata.

Parallelogrammo

Al bambino vengono consegnati due cartoncini uguali a forma di parallelogrammo. Su entrambi i cartoncini si evidenziano, con colori diversi, la base e una altezza.
Consegna:

> *"Trasforma il parallelogrammo in un rettangolo equiesteso e registra le uguaglianze che risultano confrontando le aree, le basi e le altezze."*

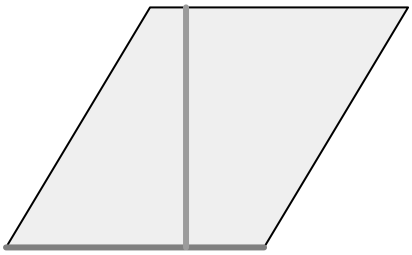
Dopo aver incollato il primo cartoncino (parallelogrammo) sotto il testo del problema, il bambino elabora, con forbici e nastro adesivo, il secondo cartoncino. Risolto manualmente il problema, incollerà il 2° cartoncino trasformato in rettangolo sotto il 1° e passerà al completamento dell'esercizio.

Il risultato potrebbe essere il seguente:

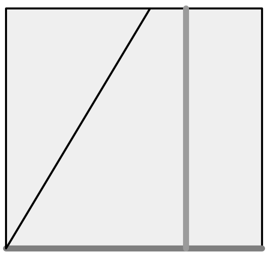
TRASFORMAZIONE

Trasforma il parallelogrammo in un rettangolo equiesteso e registra le uguaglianze che risultano confrontando le aree, le basi e le altezze.

partenza



arrivo



Convenzione:

p = parallelogrammo
r = rettangolo

Registrazioni:

$A_r = A_p$ $\quad b_r = b_p$ $\quad h_r = h_p$

Calcolo dell'area:

$A_r = A_p$ = unità² (b_r x h_r) =
= unità² (b_p x h_p) =

Per le figure di cartoncino:

Dopo aver misurato risulta:

Base parallelogrammo = 13 cm

Altezza parallelogrammo = 9 cm

Quindi:

A_p = cm² (13 x 9) = cm² 117

fig. 368

E' necessario evidenziare il risultato di generalizzazione riguardante il calcolo dell'area del parallelogrammo.

AREA (parallelogrammo) = unità² (BASE x ALTEZZA)

Triangolo (1° caso)

Si procede con consegne analoghe a quelle utilizzate per l'area del parallelogrammo.

Per ottenere il rettangolo bisogna piegare il vertice dell'altezza sul suo piede e ritagliare lungo la piegatura. il triangolo staccato viene tagliato lungo la sua altezza e i due triangoli rettangoli ottenuti vengono incollati sulle obliquità del trapezio.

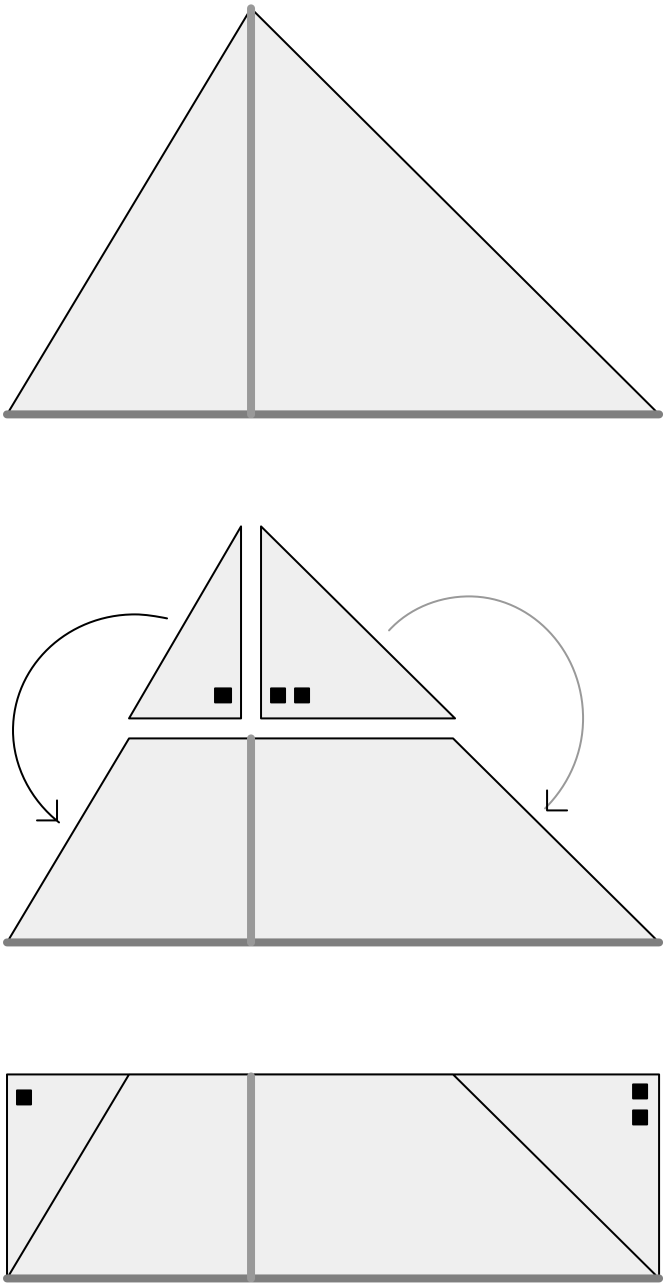


fig. 369

REGISTRAZIONE :

$$A_r = A_t$$

$$b_r = b_t$$

$$h_r = \frac{h_t}{2}$$

L'area e la base non variano, mentre l'altezza si dimezza.

CALCOLO DELL' AREA :

$$A_t = A_r = unità^2 \left(b_r \times h_r \right) =$$

$$= unità^2 \left(b_t \times \frac{h_t}{2} \right)$$

AREA (triangolo) = unità² (BASE x SEMIALTEZZA)

Nel caso specifico, se la base è 9 cm e l'altezza è 6 cm, l'area del triangolo risulta:

$$A_t = cm^2 \left(9 \times \frac{6}{2} \right) = cm^2 \left(9 \times 3 \right) = cm^2\, 27$$

Triangolo (2° caso)

Per ottenere il rettangolo, bisogna trovare con piegature il punto medio della base e il punto medio di un lato obliquo. Si taglia il triangolo e lo si incolla in modo da ottenere un parallelogrammo.

Si trasforma poi il parallelogrammo in rettangolo, come fatto precedentemente.

$$REGISTRAZIONE:$$

$$A_r = A_t$$

$$h_r = h_t$$

$$b_r = \frac{b_t}{2}$$

L'area e l'altezza non variano, mentre la base si dimezza.

$$CALCOLO\ DELL'\ AREA:$$

$$A_t = A_r = unità^2 (b_r \times h_r) =$$

$$= unità^2 \left(\frac{b_t}{2} \times h_t \right)$$

AREA (triangolo)
=
unità² (SEMIBASE x ALTEZZA)

Nel caso specifico:

$$A_t = cm^2 \left(\frac{9}{2} \times 6 \right) =$$

$$= cm^2 (4,5 \times 6) = cm^2 27$$

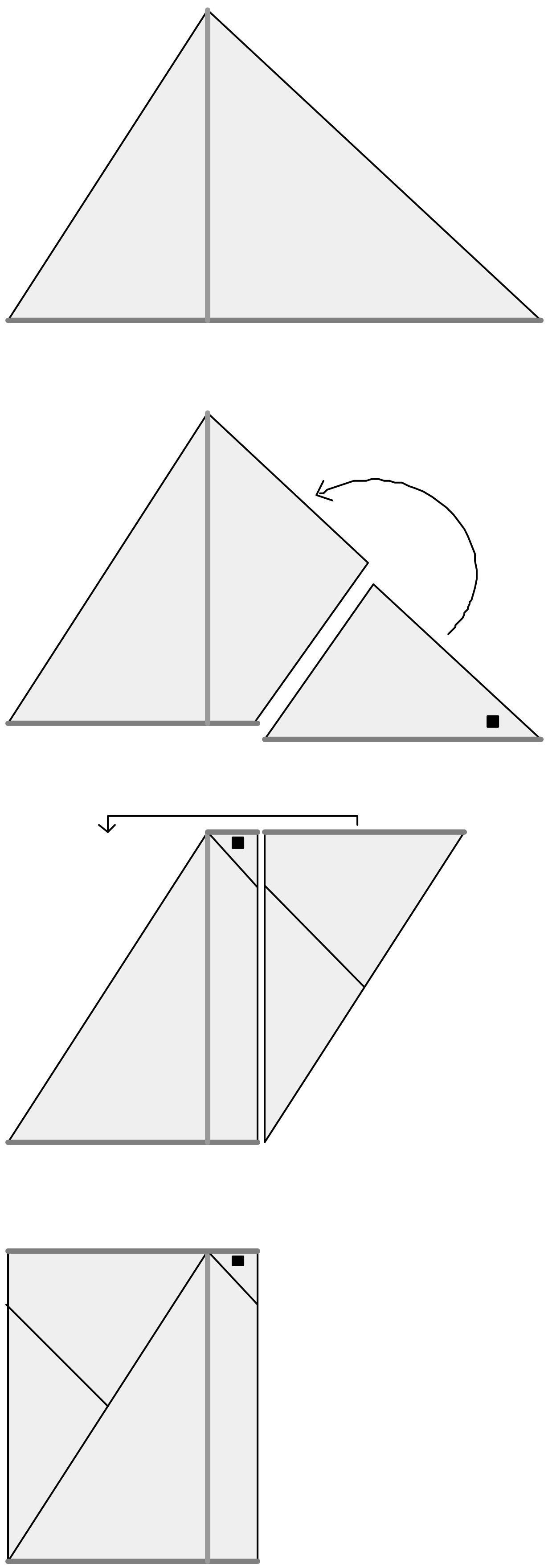


fig. 370

Triangolo (3° caso)

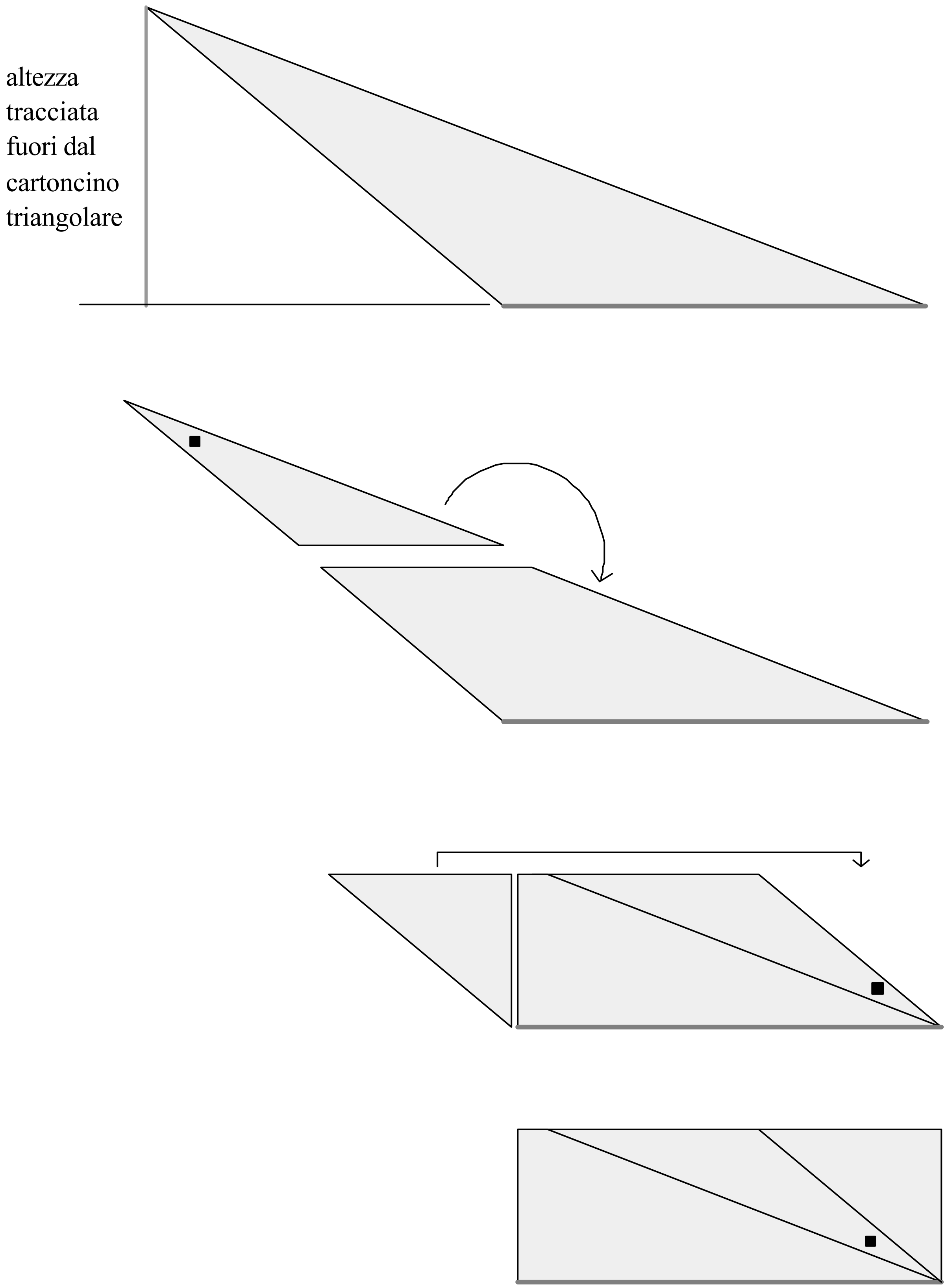


fig. 371

Nel caso del triangolo ottusangolo la trasformazione di equiestensione avviene come rappresentato dalla figura e si crea una situazione analoga a quella esposta nel triangolo 1° caso.
Le altezze, non potendo essere tracciate sul cartoncino triangolare, saranno tracciate e misurate sul quaderno.

Rombo (1° caso)

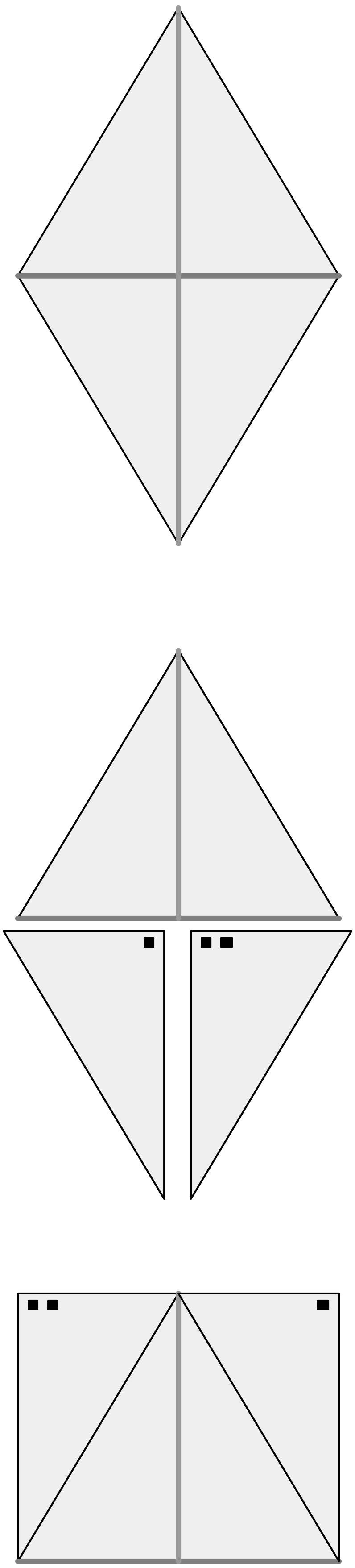


fig. 372

Per ottenere il rettangolo, si taglia il rombo lungo una diagonale. Uno dei triangoli isosceli ottenuti si taglia lungo la sua altezza e ciascuno dei due triangoli rettangoli viene incollato come da figura.

REGISTRAZIONE :

$$A_{re}=A_{ro}$$

$$b_{re}=d_{ro}$$

$$h_{re}=\frac{D_{ro}}{2}$$

CALCOLO DELL' AREA :

$$A_{ro}=A_{re}=unità^2\left(b_{re}\times h_{re}\right)=$$

$$=unità^2\left(d_{ro}\times\frac{D_{ro}}{2}\right)$$

AREA (rombo)
=
unità² (DIAGONALE$_1$ x SEMIDIAGONALE$_2$)

Procedendo con l'altra trasformazione:

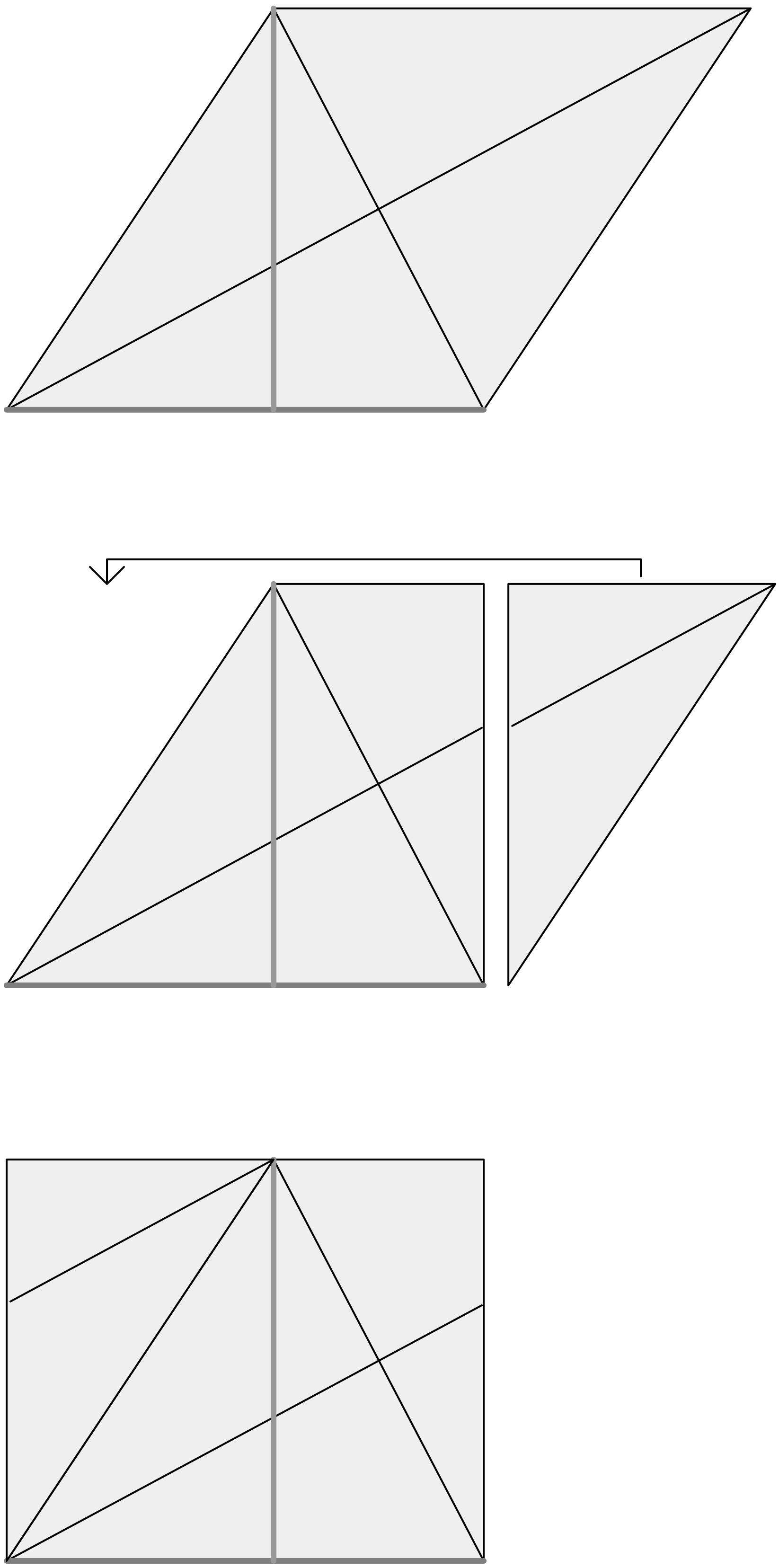
AREA (rombo)
=
unità² (SEMIDIAGONALE$_1$ x DIAGONALE$_2$)

Nel caso specifico, se: DIAG1 = 6 cm, DIAG2 = 10 cm, allora:

$$A_t=cm^2\left(6\times\frac{10}{2}\right)=cm^2\left(6\times5\right)=cm^2 30$$

$$A_t=cm^2\left(\frac{6}{2}\times10\right)=cm^2\left(3\times10\right)=cm^2 30$$

Rombo (2° caso)



In questo caso la trasformazione viene effettuata considerando il rombo come un particolare parallelogrammo.

Si arriva alle seguenti conclusioni:

$$\mathit{REGISTRAZIONE}:$$

$$A_{re} = A_{ro}$$

$$b_{re} = l_{ro}$$

$$h_{re} = h_{ro}$$

$$\mathit{CALCOLO\ DELL'\ AREA}:$$

$$A_{ro} = A_{re} =$$

$$= unità^2 (b_{re} \times h_{re}) =$$

$$= unità^2 (l_{ro} \times h_{ro})$$

AREA (rombo) = **unità² (LATO x ALTEZZA)**

Nel caso specifico, se: LATO = 9 cm, ALTEZZA = 8,1 cm:

$$A_{ro} = cm^2 (9 \times 8{,}1) =$$

$$= cm^2\, 72{,}9$$

fig. 373

Trapezio

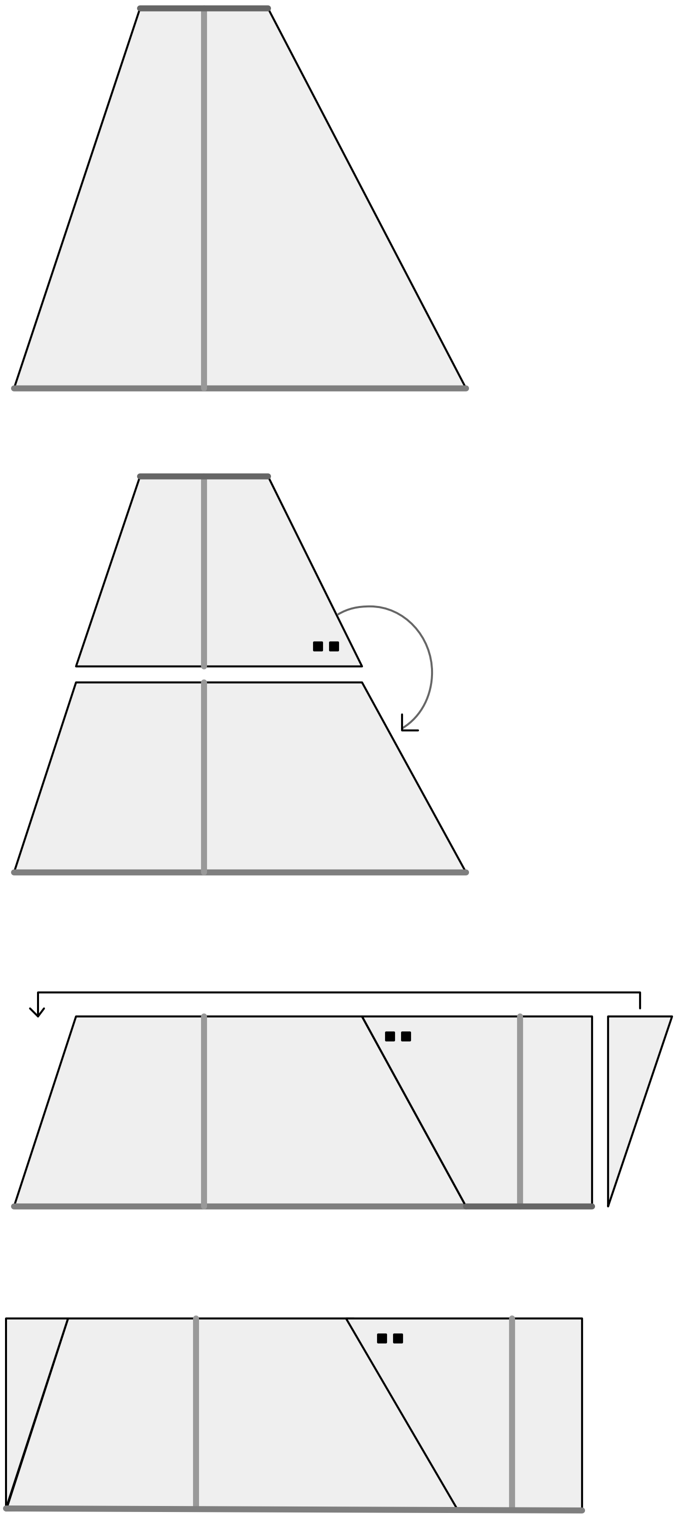


fig. 374

Per ottenere il rettangolo, si piega una base del trapezio sull'altra, si taglia lungo la piegatura e si incolla la parte staccata in modo da ottenere un parallelogrammo.

Si procede come al solito.

$$REGISTRAZIONE:$$

$$A_{re} = A_{tr}$$

$$b_{re} = B_{tr} + b_{tr}$$

$$h_{re} = \frac{h_{tr}}{2}$$

$$CALCOLO\ DELL'\ AREA:$$

$$A_{tr} = A_{re} =$$

$$= unità^2 (b_{re} \times h_{re}) =$$

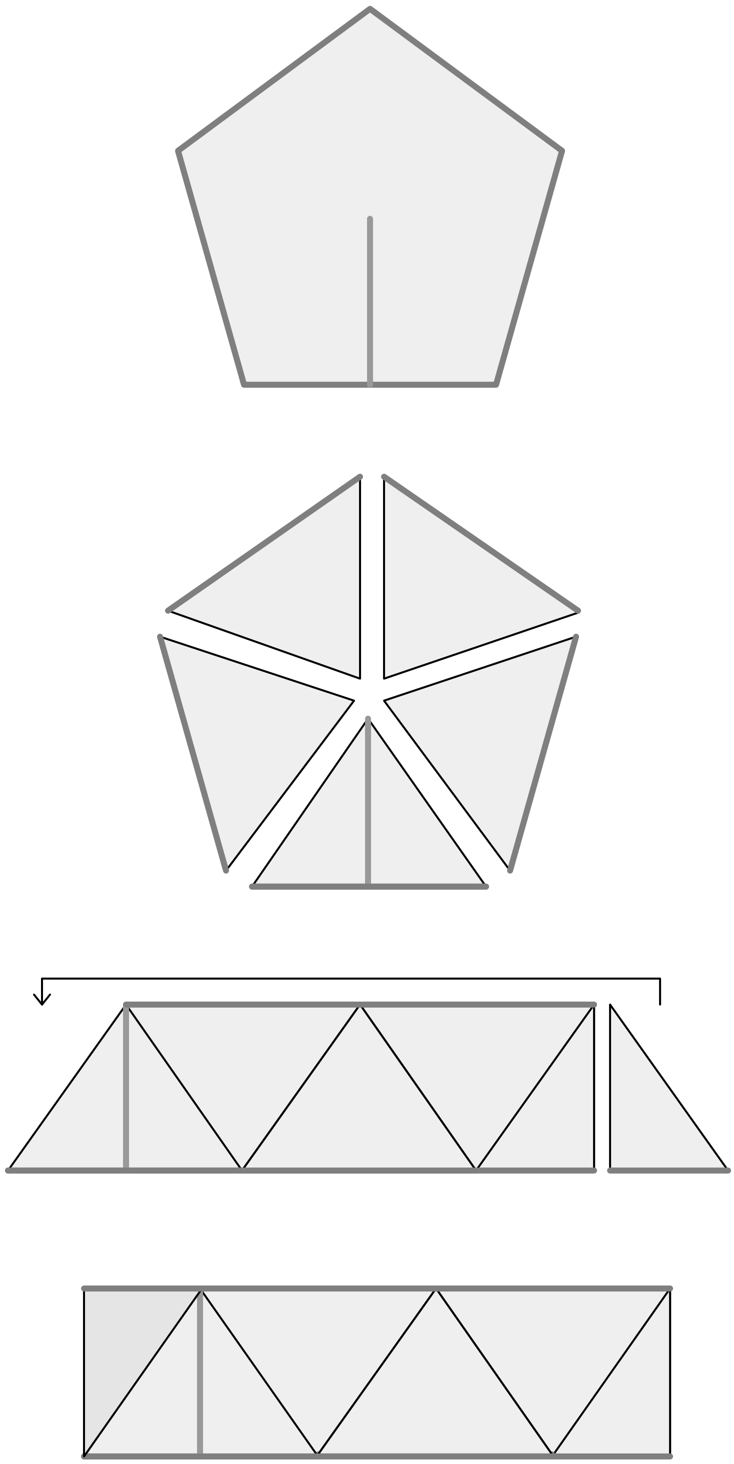
$$= unità^2 (B_{tr} + b_{tr}) \times \frac{h_{tr}}{2}$$

AREA (trapezio)
=
unità²
(SOMMABASI x SEMIALTEZZA)

Nel caso specifico, se: BASEMAGGIORE = 8 cm, BASEMINORE = 5 cm, ALTEZZA = 6 cm

$$A_{tp} = cm^2 \left[(8+5) \times \frac{6}{2} \right] = cm^2 [13 \times 3] = cm^2 39$$

Poligono regolare (1° caso)



Per ottenere il rettangolo, si taglia il pentagono in 5 triangoli isosceli, che vengono poi ricomposti in modo da ottenere un trapezio isoscele. Da questo, ritagliando e spostando il triangolo rettangolo si ottiene la trasformazione voluta.

$$\mathit{REGISTRAZIONE}:$$

$$A_{re} = A_{pol}$$

$$b_{re} = \frac{2p_{pol}}{2} = p_{pol}$$

$$h_{re} = a_{pol}$$

$$\mathit{CALCOLO\ DELL'\ AREA}:$$

$$A_{pol} = A_{re} =$$

$$= unità^2 (b_{re} \times h_{re}) =$$

$$= unità^2 (p_{pol} \times a_{pol})$$

AREA (poligono regolare)
=
unità²
(SEMIPERIM. x APOTEMA)

fig. 375

Nel caso specifico, se: LATO=7cm, APOT.=4,8cm

$$A_{pol} = cm^2 \left(\frac{7 \times 5}{2} \times 4{,}8 \right) = cm^2 (17{,}5 \times 4{,}8) = cm^2 84$$

Poligono regolare (2° caso)

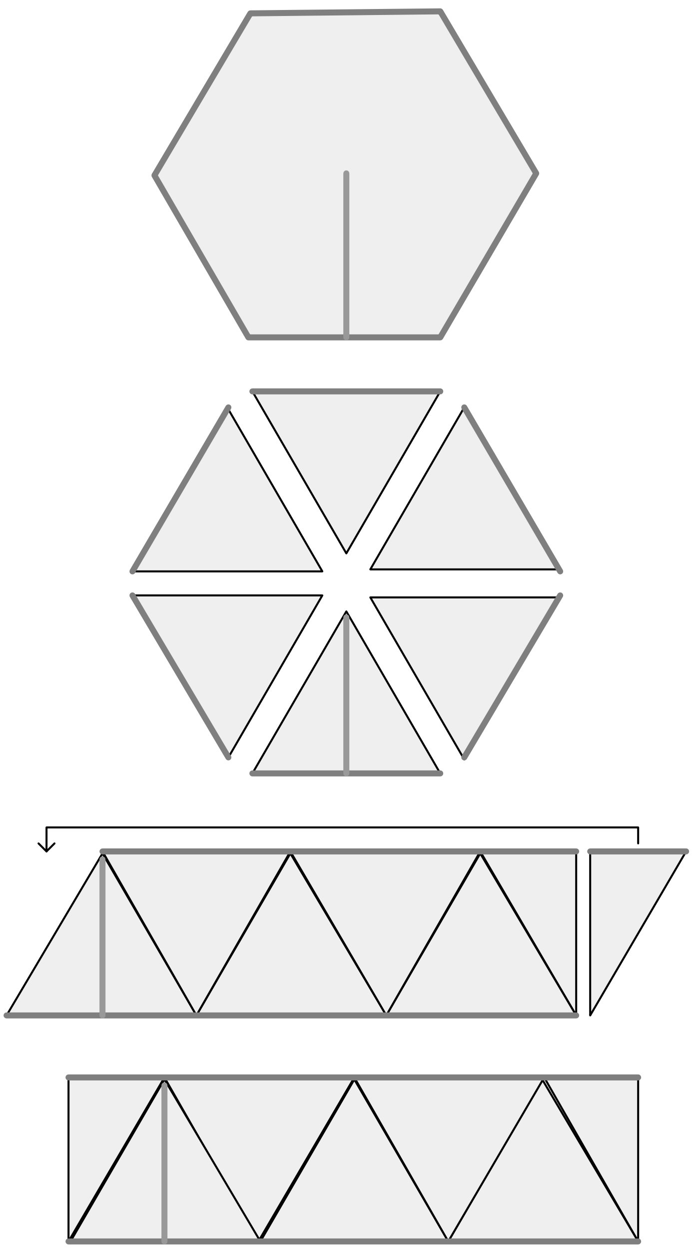


fig. 376

Questo caso differisce dal precedente nel numero pari di lati del poligono invece che dispari. Si procede come già detto, solo che, invece di ottenere un trapezio isoscele (come fase intermedia), si ottiene un parallelogrammo. Si arriva, in ogni caso, alla stessa conclusione:

AREA (poligono regolare) = unità² (SEMIPERIMETRO x APOTEMA)

Nel caso specifico, se: LATO = cm 4,8 APOTEMA = cm 4,15

$$A_{pol} = cm^2\left[\left(4{,}8 \times 3\right) \times 4{,}15\right] = cm^2\left(14{,}4 \times 4{,}15\right) = cm^2 59{,}76$$

OSSERVAZIONI: Il rapporto costante (numero fisso) fra la lunghezza dell'apotema e la lunghezza del lato, che è caratteristico di ogni poligono regolare, verrà trattato più avanti.

17.
ANGOLI E PARALLELISMO NELLE TRASFORMAZIONI

LE PROIEZIONI LUMINOSE PER TRASFORMARE

Nell'ambito delle trasformazioni, dopo che i bambini hanno acquisito i concetti di angolo e di parallelismo, è possibile indagare sulle trasformazioni che possono conservare o meno le ampiezze degli angoli e i parallelismi tra i lati.
Un modo semplice per ottenere le trasformazioni riguardanti tali proprietà geometriche è quello di proiettare le figure su uno schermo, utilizzando una sorgente luminosa. La sorgente luminosa può essere sia il sole sia un proiettore per diapositive, un proiettore per stampe fotografiche, un episcopio, una lavagna luminosa.
Con tali proiezioni la figura trasformata (figura di arrivo) è una immagine che, per essere confrontata con la figura di partenza, deve essere riprodotta graficamente su un foglio.
E' importante che il bambino abbia tutte e due le figure sotto forma di disegno: quella di partenza e quella di arrivo, perché in tal modo le può incollare sul quaderno e può rilevare tutte le misure e tutte le proprietà necessarie per procedere ai confronti. Dai confronti arriverà alla deduzione delle varianze e delle invarianze che riguardano la trasformazione fatta.

Sul retro dello schermo traslucido il bambino incolla con il nastro adesivo un foglio di carta e poi, con un pennarello, riproduce il contorno dell'ombra (vedi figura 377).
Ottiene quindi sul foglio di carta la figura trasformata e può confrontarla direttamente con la figura di partenza.
Con l'uso degli strumenti squadre e goniometro il bambino verifica se gli angoli e i parallelismi si sono conservati o no.

NOTA: E' opportuno che la distanza tra la figura di partenza e lo schermo sia breve, in modo da ottenere immagini riproducibili sul quaderno.
Affinché tutti i bambini abbiano le due figure da confrontare, queste possono essere riportate su di un unico foglio e fotocopiate.

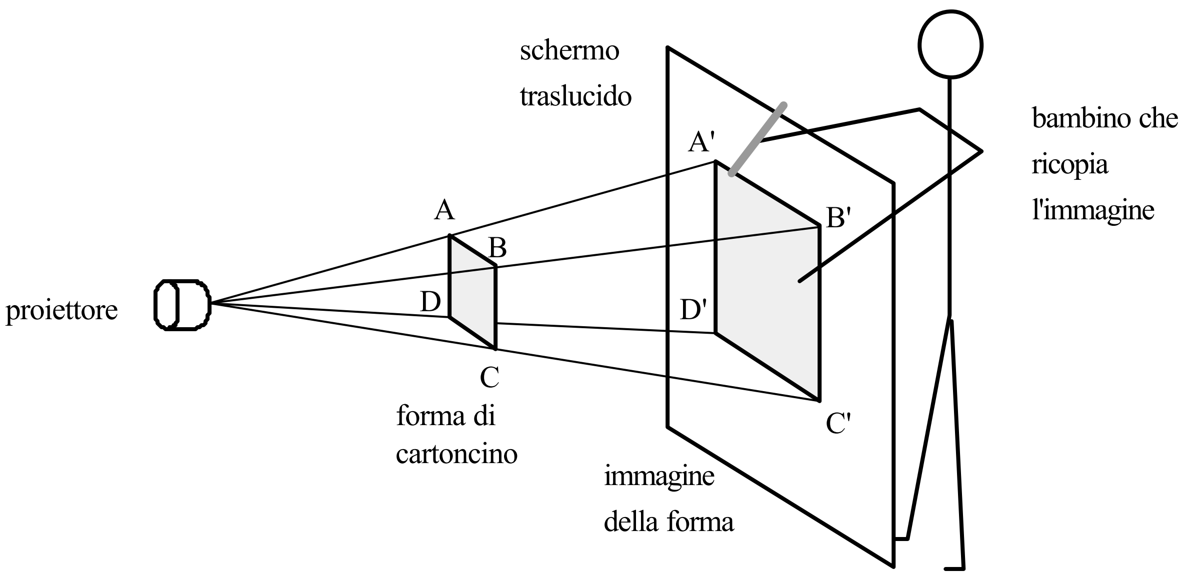


fig. 377

TRASFORMAZIONI DI FORME CON PROIEZIONI DI RAGGI PARALLELI

Un cartoncino di forma rettangolare viene immesso in un fascio di raggi luminosi che:
- o provengono dal sole;
- o provengono da un proiettore posto a grande distanza dall'oggetto da proiettare e, tale oggetto, è sufficientemente vicino allo schermo sul quale si formerà la proiezione.

Nel secondo caso i raggi luminosi sono ugualmente divergenti, ma l'angolo che sottende l'oggetto da proiettare è molto piccolo e l'occhio percepisce la parte del fascio di raggi luminosi che proiettano l'oggetto come formata da raggi paralleli:

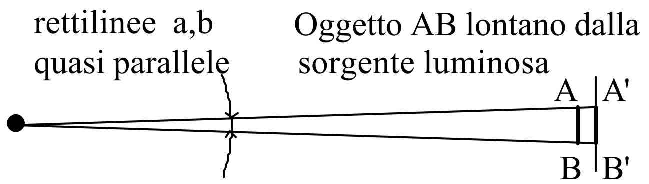


fig. 378

Nel caso che il cartoncino da proiettare sia posto molto vicino alla sorgente luminosa la divergenza diventa notevole e si ha una immagine molto diversa:

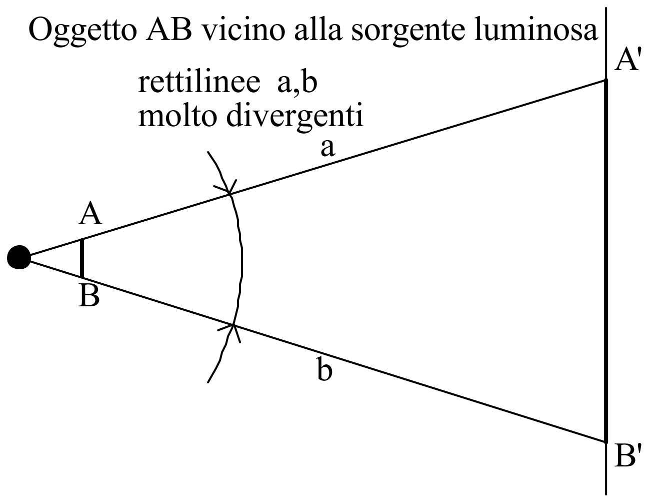


fig. 379

Proiezioni di un rettangolo

A seconda di come il cartoncino rettangolare viene orientato, le ombre assumono forme e dimensioni diverse. Se ne riportano alcune e si confrontano con il cartoncino-figura di partenza.

Il cartoncino di forma rettangolare deve essere tenuto parallelo al foglio ricettore, foglio sul quale verrà evidenziata l'immagine proiettata.

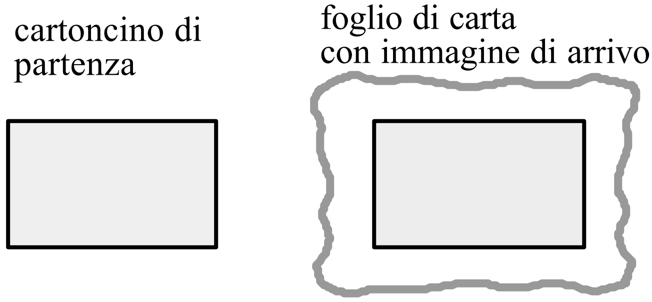


fig. 380

Dai confronti fatti con goniometro e righello centimetrato si stabilisce che non c'è stato alcun cambiamento metrico: i lati, gli angoli e i parallelismi si sono mantenuti. L'unica variante è la posizione nello spazio; si ha in effetti una traslazione della forma rettangolare nello spazio.

Dopo aver posto il cartoncino di partenza parallelo al foglio ricettore, si tengono fermi due vertici opposti e si ruota il cartoncino attorno alla diagonale che ha per estremi i vertici tenuti fermi.

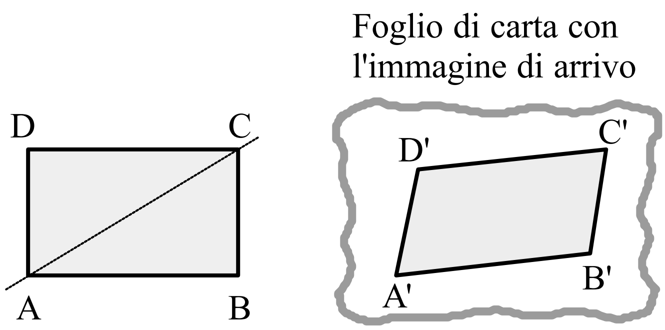


fig. 381

L'immagine che si ottiene è un parallelogrammo.

SI MANTIENE:
- l'essere quadrilatero;
- la convessità;
- il parallelismo fra i lati;
- una diagonale ($AC = A'C'$);
- l'uguaglianza fra i lati opposti ($AB = DC \to A'B' = D'C'$, $AD = BC \to A'D' = B'C'$).

NON SI MANTIENE:
- la forma;
- gli angoli interni ($\hat{A} = retto \to \hat{A'} = acuto$, $\hat{B} = retto \to \hat{B'} = ottuso$);
- le lunghezze dei lati ($AD > A'D', AB > A'B'$, ...);
- una diagonale ($BD > B'D'$);
- il perimetro;
- l'area.

Dopo aver posto il cartoncino parallelo al foglio ricettore, lo si deve far ruotare gradualmente attorno al suo asse verticale fino ad ottenere una immagine di forma quadrata.

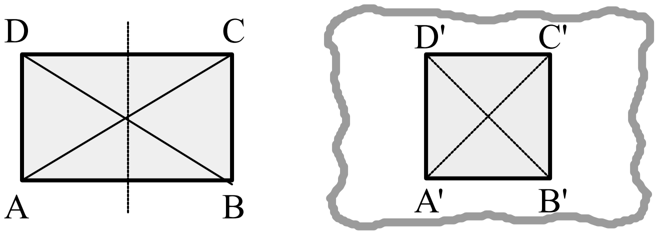


fig. 382

SI MANTIENE:
- la convessità;
- i parallelismi;
- l'essere quadrilatero;
- l'essere rettangolo;
- gli angoli interni;
- le uguaglianze tra le diagonali;
- due lati ($AD = A'D'$, $BC = B'C'$);
- le uguaglianze dei lati opposti.

NON SI MANTIENE:
- le lunghezze di due lati ($AB > A'B'$, $DC > D'C'$);
- le lunghezze delle diagonali ($AC > A'C'$, $BD > B'D'$);
- la forma specifica (da rettangolo non equilatero a rettangolo equilatero);
- il perimetro;
- l'area;
- gli angoli individuati dall'intersezione delle due diagonali (in partenza sono acuti e ottusi; in arrivo sono tutti retti).

Proiezioni di un triangolo

Dopo aver posto un cartoncino triangolare equilatero parallelo al foglio ricettore, lo si deve far ruotare attorno ad una altezza (dopo aver fatto la rotazione i lati del triangolo non saranno più paralleli al foglio).

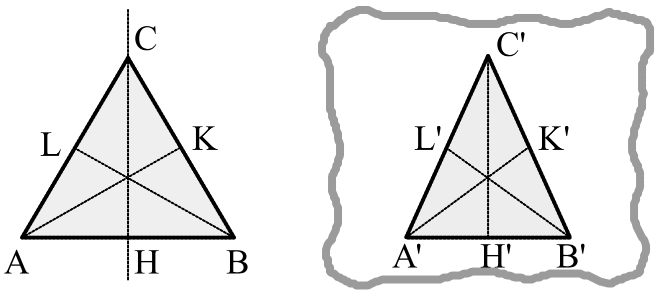


fig. 383

Si misurano lati, angoli, altezze, perimetri, superfici e si elencano le varianze e le invarianze.

SI MANTIENE:
- la convessità;
- l'essere triangolo isoscele;
- una altezza ($CH = C'H'$);
- una uguaglianza tra angoli ($C\hat{A}B = C\hat{B}A \to C'\hat{A'}B' = C'\hat{B'}A'$);
- una uguaglianza tra lati ($AC = CB \to A'C' = C'B'$).

NON SI MANTIENE:
- le lunghezze dei lati;
- due altezze (AK *altezza* $\to A'K'$ *non altezza* ...);
- Alcune uguaglianze fra lati ($AC = AB \to A'C' > A'B'$);
- alcune uguaglianze fra angoli ($A\hat{B}C = A\hat{C}B \to A'\hat{B'}C' \neq A'\hat{C'}B'$);
- gli angoli ($C\hat{A}B < C'\hat{A'}B'$,...);
- i lati ($AC < A'C'$,...);
- il perimetro;
- l'area.

Proiezioni di un cerchio

Dopo aver posto un cartoncino a forma di cerchio parallelo al foglio ricettore, lo si deve far ruotare attorno ad un diametro.

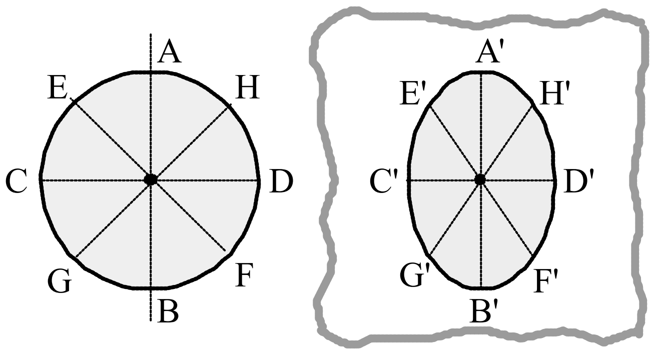


fig. 384

Si ottiene una ellisse.
Si misurano i diametri e si analizzano le varianze e le invarianze.

SI MANTIENE:
- la convessità;
- il confine curvilineo;
- la lunghezza di un solo diametro ($AB = A'B'$);
- una perpendicolarità ($AB \perp CD \to A'C' \perp C'D'$).

NON SI MANTIENE:
- l'essere cerchio;
- la lunghezza di tutti i diametri tranne quella di *AB*;
- l'equidistanza dal centro al confine;
- l'ampiezza degli angoli formati dai diametri tranne quella di *AB* con *CD*.

TRASFORMAZIONI DI FORMA CON PROIEZIONI DI RAGGI DIVERGENTI

Per ottenere tali trasformazioni occorre partire con cartoncini sufficientemente piccoli posti vicini alla sorgente luminosa in modo che i raggi che proiettano l'oggetto risultino fortemente divergenti.
Si ottengono, sul foglio ricettore, immagini ingrandite che vengono confrontate con la forma di partenza procedendo in modo analogo a quello adottato negli esercizi precedenti.

Disporre un cartoncino di forma quadrata parallelo al foglio ricettore.

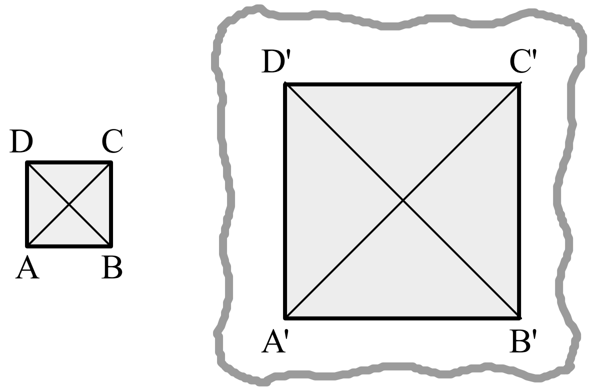


fig. 385

Si ottiene un nuovo quadrato. Si misurano lati, angoli, diagonali e si elencano le varianze e le invarianze.

SI MANTIENE:
- la convessità;
- l'essere quadrato;
- le uguaglianze fra i lati;
- le uguaglianze fra le diagonali;
- gli angoli e i parallelismi.

NON SI MANTIENE:
- le lunghezze dei lati e delle diagonali;
- il perimetro e l'area.

Disporre un cartoncino di forma quadrata con due lati opposti paralleli al foglio ricettore, ma con gli altri due lati non paralleli al foglio ricettore.

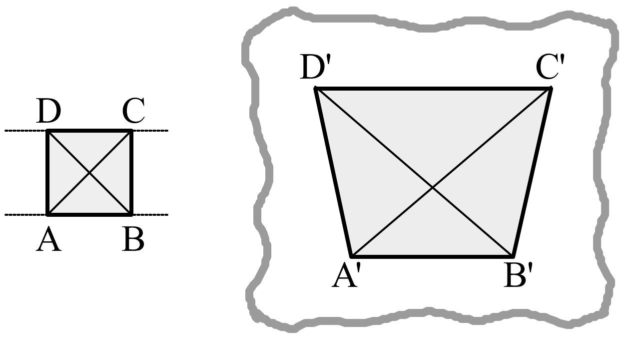


fig. 386

Si ottiene un trapezio isoscele.

SI MANTIENE:
- la convessità;
- l'essere quadrilatero;
- le uguaglianze tra due lati ($AD = CB \rightarrow A'D' = C'B'$);
- un parallelismo fra lati ($AB \parallel DC \rightarrow A'B' \parallel D'C'$);
- le uguaglianze fra diagonali ($AC = BD \rightarrow A'C' = B'D'$).

NON SI MANTIENE:
- l'essere quadrato;
- le lunghezze dei lati ($AD < A'D'$, ...);
- le lunghezze delle diagonali ($BD < B'D'$, ...);
- gli angoli ($D\hat{A}B < D'\hat{A}'B', A\hat{D}C > A'\hat{D}'C'$, ...);
- la perpendicolarità fra le diagonali;
- un parallelismo fra lati ($AD \parallel BC \rightarrow A'D'\ non \parallel B'C'$);
- certe uguaglianze fra lati ($AD = DC \rightarrow A'D' < D'C'$ ...);
- il perimetro e l'area.

Dopo aver disposto un cartoncino di forma quadrata parallelo al foglio ricettore, lo si deve far ruotare attorno ad una diagonale.

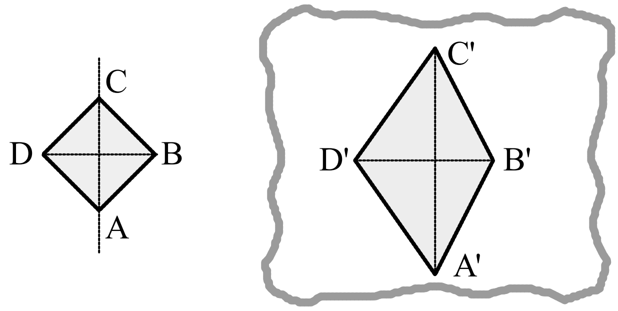


fig. 387

Ciò che si ottiene non è un quadrilatero che rientra fra quelli comunemente incontrati finora.
Effettuate le misurazioni, come al solito, si elencano le varianze e le invarianze.

SI MANTIENE:
- la convessità;
- l'essere quadrilatero;
- la perpendicolarità fra le diagonali;
- .....

NON SI MANTIENE:
- l'essere quadrato;
- le lunghezze dei lati ;
- l'uguaglianza fra le diagonali;
- l'uguaglianza fra gli angoli;
- .....

18.
SIMMETRIE, ROTAZIONI, OMOTETIE

Alcune trasformazioni possono essere affrontate attraverso particolari procedure grafiche, utilizzando cioè riga, squadra e compasso.
Le figure di partenza e di arrivo devono essere confrontate, a livello metrico, in relazione alle lunghezze, alle ampiezze angolari, ai parallelismi, alle aree.
Le altre proprietà come la concavità-convessità, l'essere regione, la forma,... pur mantenendosi in ogni trasformazione, non saranno prese in considerazione.

SIMMETRIE ASSIALI

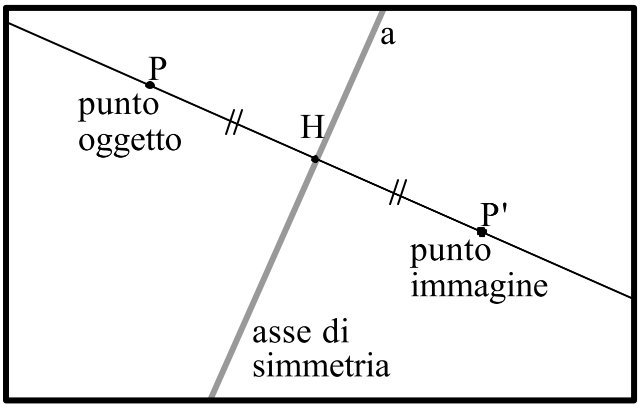


fig. 388

Dati un punto ed una retta (asse di simmetria), il ***simmetrico rispetto all'asse*** *è il punto che si trova distante dall'asse quanto il punto di partenza, ma nel semipiano opposto, e la retta passante per i due punti è perpendicolare all'asse.*

Dati il punto **P** e l'asse **a**, per ottenere il suo simmetrico **P'** si traccia la perpendicolare all'asse per **P**, si rileva la sua distanza **PH** dall'asse e la si riporta nel semipiano opposto.

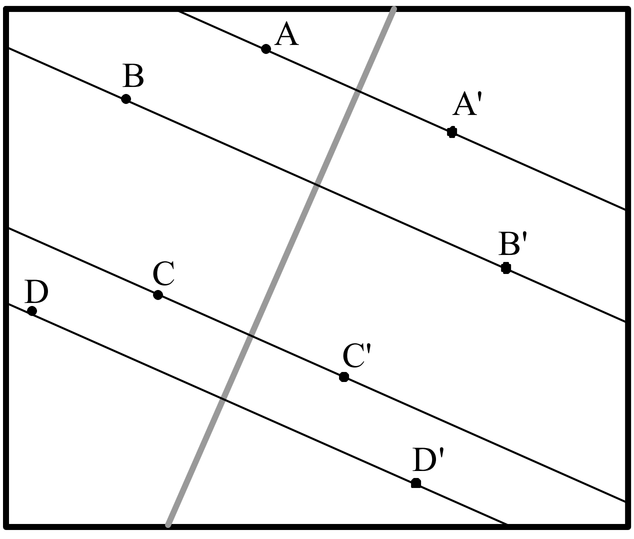


fig. 389

Con procedura analoga si può trovare l'insieme simmetrico di un insieme di punti.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Punti partenza} & & \textit{Punti arrivo} \\ \left.\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\right] & \xrightarrow{\text{SIMMETRIA ASSIALE}} & \left[\begin{array}{c} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{array}\right. \end{array}$$

Si può anche scrivere che:

$\{ A', B', C', D' \}$
è il trasformato simmetrico di
$\{ A , B , C , D \}$

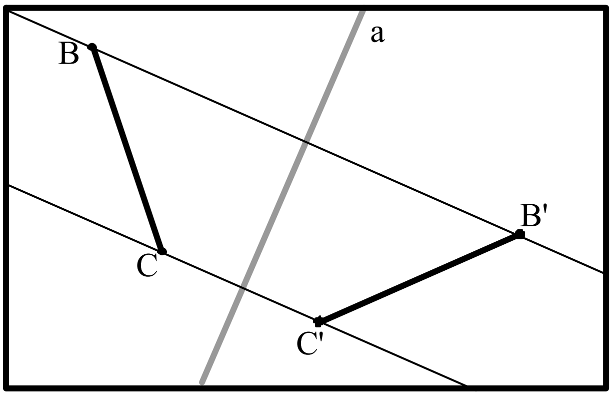


fig . 390

Se l'insieme dei punti di partenza è un segmento, l'insieme simmetrico è un nuovo segmento e, per ottenerlo, è sufficiente trovare le simmetrie dei punti estremi.

La trasformazione simmetrica di segmenti mantiene la lunghezza e l'ordine dei punti. Non mantiene la posizione sul piano e, normalmente, nemmeno la direzione (l'unica eccezione si ha quando il segmento è parallelo all'asse).

ESERCIZI:

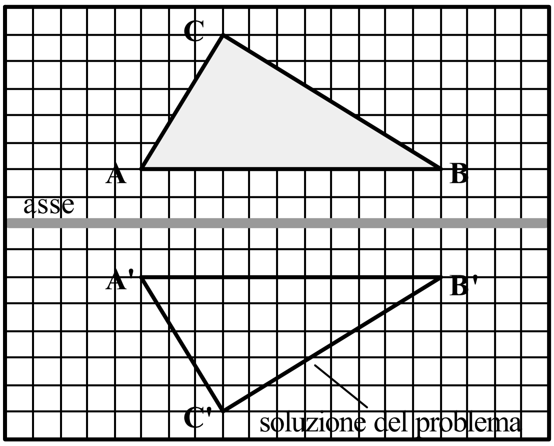


fig. 391

Sulla parte superiore di un foglio quadrettato si incolla un cartoncino di forma triangolare.
Si traccia un asse orizzontale (per facilitare le prime costruzioni di simmetria).
Il bambino traccia le opportune perpendicolari, rileva le distanze e le riporta nel semipiano sottostante individuando i vertici simmetrici e, di conseguenza, il triangolo simmetrico.

A questo punto il bambino verificherà che si sono mantenute le lunghezze dei lati, le ampiezze angolari, l'area. Non si sono mantenute le direzioni dei lati e le posizioni relative (in partenza C è sopra AB; in arrivo C' è sotto A'B').

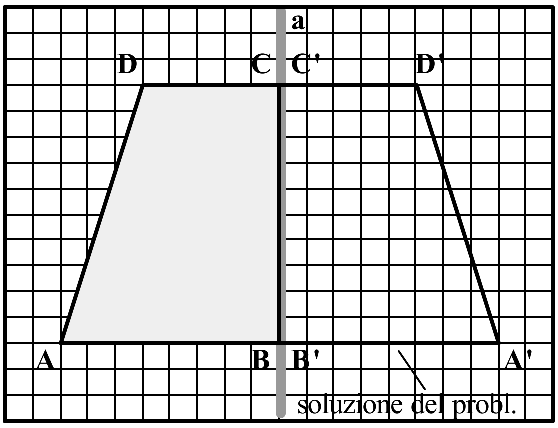


fig. 392

Un cartoncino a forma di trapezio rettangolo viene incollato con l'altezza che è parte dell'asse di simmetria.
Il trapezio rettangolo simmetrico mantiene tutte le proprietà metriche della figura di partenza (da far verificare al bambino).

Analizzando l'unione tra le due figure si scopre una nuova figura (un trapezio isoscele AA'D'D) e l'asse della trasformazione viene detto *"asse di simmetria" del trapezio isoscele*.

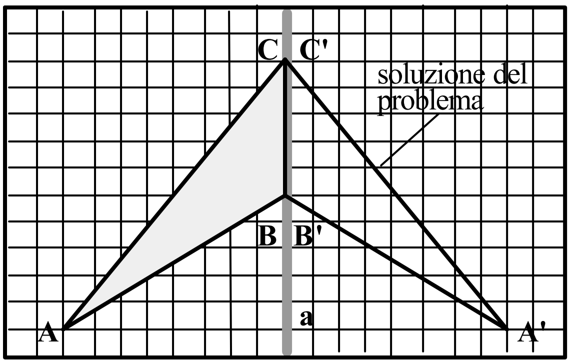


fig. 393

Un triangolo ottusangolo ABC con un lato sull'asse di simmetria si trasforma nel suo simmetrico A'B'C'.
L'unione tra la figura di partenza e quella di arrivo è a forma di punta di freccia e la retta **a** è il suo asse di simmetria.

Altri esercizi analoghi a questi vanno proposti per abituare il bambino al concetto di asse di simmetria di una figura piana.

La necessità del tipo di esercizi appena proposti è meglio evidenziata dalla figura disegnata sotto.

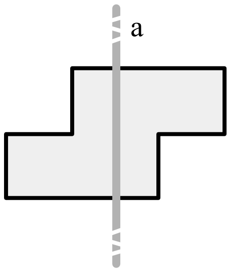
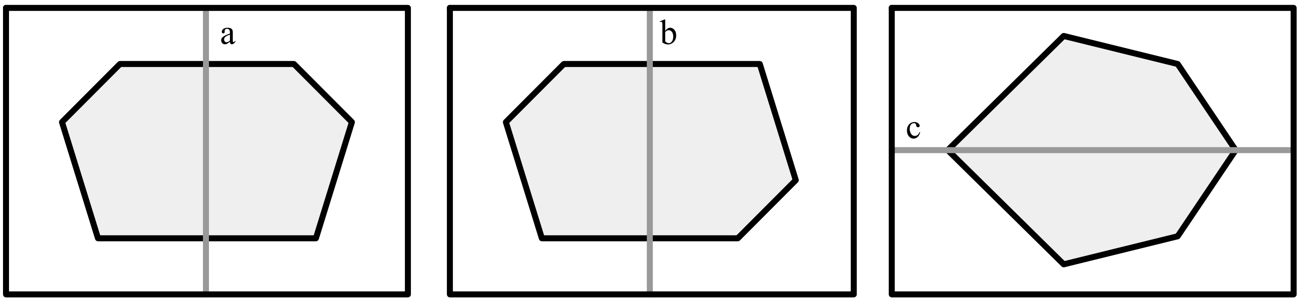


fig. 394

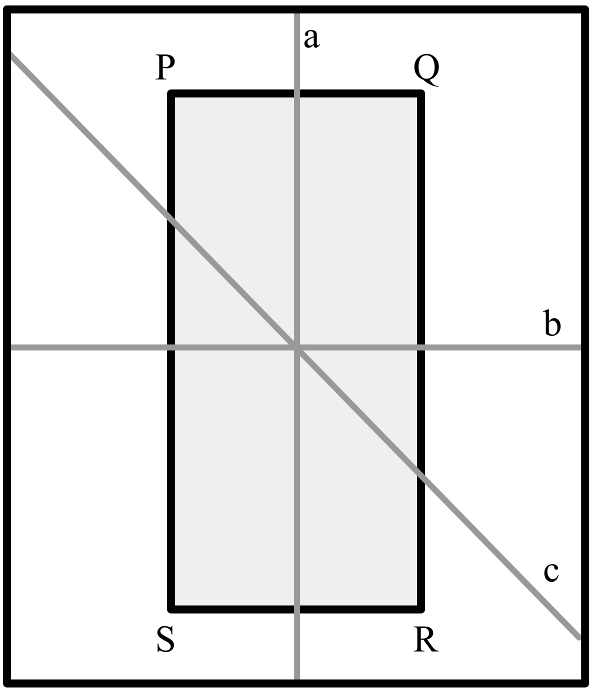
La retta **a** non è l'asse di simmetria dell'ottagono concavo, pur essendo una retta che lo divide in due parti perfettamente uguali nelle lunghezze dei lati, nelle ampiezze angolari, nelle aree e nei parallelismi.
L'asse di simmetria di una figura non solo divide la stessa in due parti uguali ma, oltre che invertire destra con sinistra, mantiene il sopra-sotto.

A livello di schede è utile proporre esercizi dove si differenziano le rette che dividono semplicemente la figura in due parti uguali dalle rette che sono assi di simmetria.



Nei piani in cui figurano i tre esagoni sono state tracciate le rette a, b, c.
Quali di queste rette sono assi di simmetria dell'esagono, cioè dividono l'esagono in due parti una simmetrica all'altra ? ____________________

fig. 395



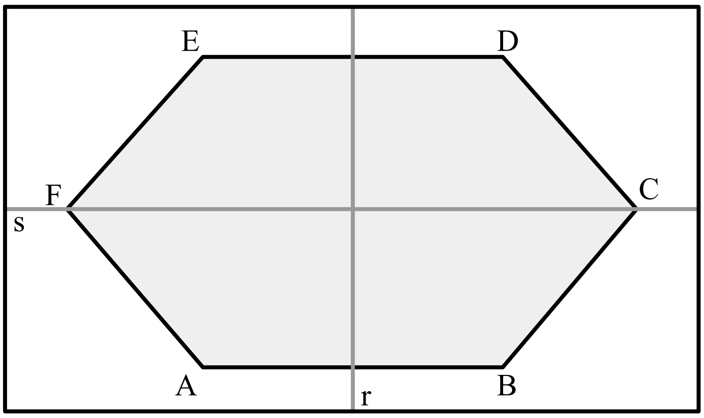
Quali delle rette a, b, c sono assi di simme-tria del rettangolo PQRS, cioè dividono il ret-tangolo in due parti simmetriche ? __________

Secondo l'asse a, il punto P è il simmetrico del punto Q ? ______________________________

Secondo l'asse b, qual è il punto simmetrico del punto R ? ____________________________

Disegna il punto T simmetrico al punto R rispetto alla retta c.

fig. 396

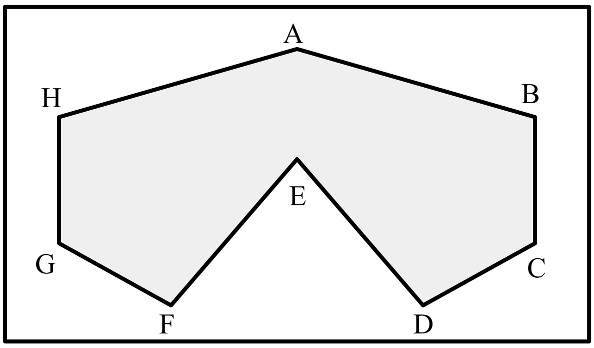


Completa le tabelle

Punto	Punto Simmetrico rispetto all'asse:	
	r	s
A	*B*	*E*
B		
C		*C*
D		
E		
F		

Segmento	Segmento simmetrico rispetto all'asse	
	r	s
AB	*BA*	*ED*
BC		
CD		
DE		
EF		
FA		

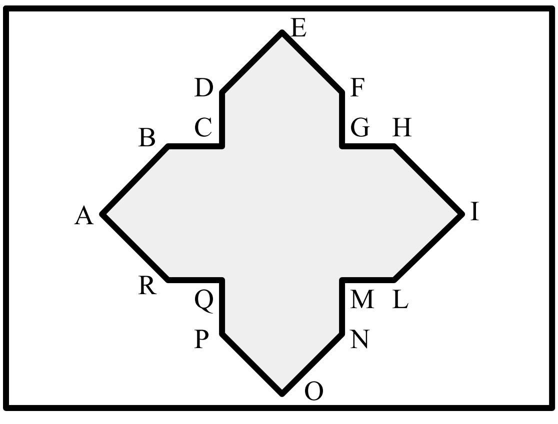
fig. 397



Nel piano è stato tracciato un ottagono con-cavo che ha un asse di simmetria.
Traccia questo asse di simmetria e colora le due parti, una simmetrica all'altra, con due colori diversi.

Quale è la spezzata simmetrica alla spezzata AHGF ? ______________________________

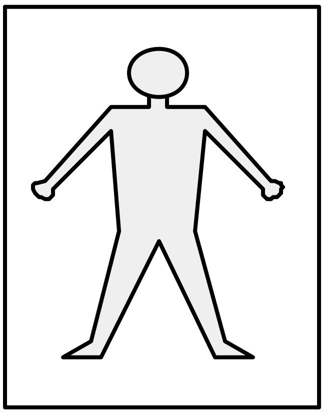
fig. 398

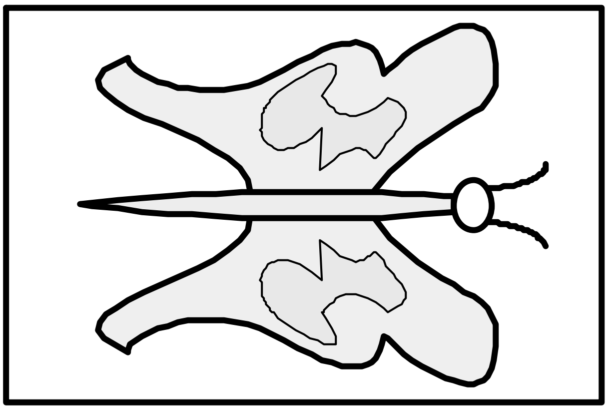


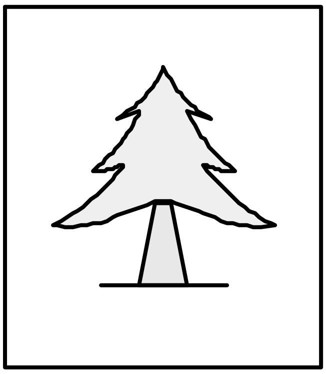
La figura disegnata possiede diversi assi di simmetria.
Tracciane due: uno verticale e l'altro obliquo.

Colora di rosso la spezzata BAR e di blu la sua simmetrica rispetto all'asse obliquo trac-ciato.

fig. 399







Delle figure disegnate traccia gli assi di simme-tria e colora le due parti simmetriche con colori diversi.
Trova nella realtà figure nelle quali è possibile individuare degli assi di simmetria:

Foglia d'edera   *Libellula*

________________ ________________
________________ ________________
________________ ________________

fig. 400

SIMMETRIE CENTRALI

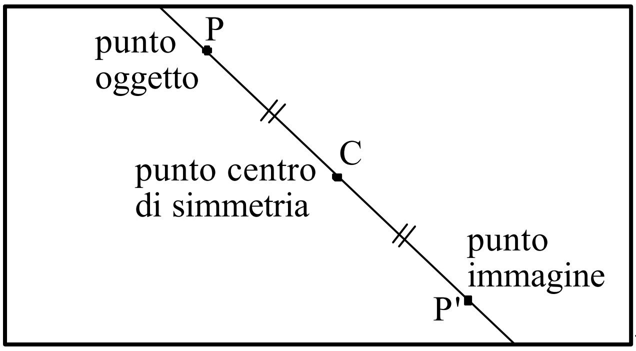


fig. 401

Dati i punti ***P*** *e* ***C****, il punto* ***simmetrico di P rispetto a C*** *è il punto* ***P'*** *che si trova sulla retta* ***PC****, dalla parte opposta di* ***P*** *e tale che* ***P*** *e* ***P'*** *siano equidistanti da* ***C****.*

In tal modo **C** risulta al centro del segmento **PP'** e quindi viene detto *centro della simmetria*. Tale simmetria, riferita ad un punto, è detta *simmetria centrale*.

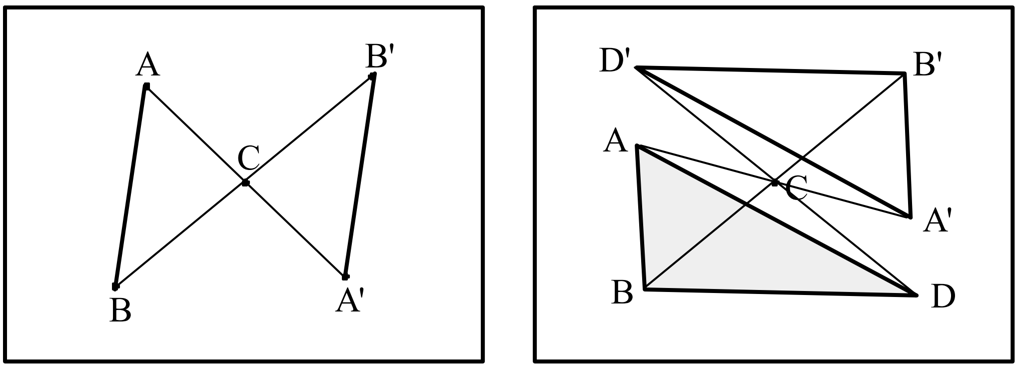
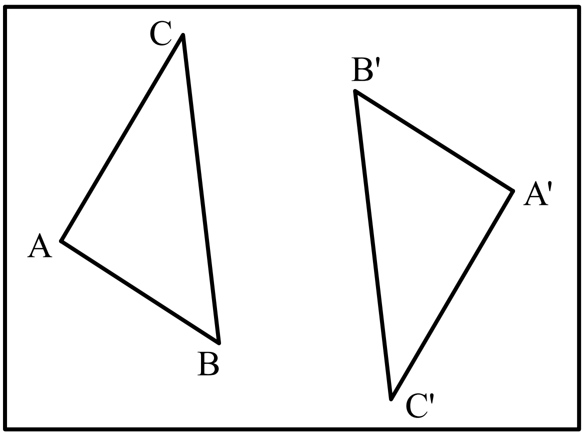


fig. 402

Analogamente a quanto fatto per le simmetrie assiali, si possono ottenere le simmetrie centrali di segmenti e di poligoni.

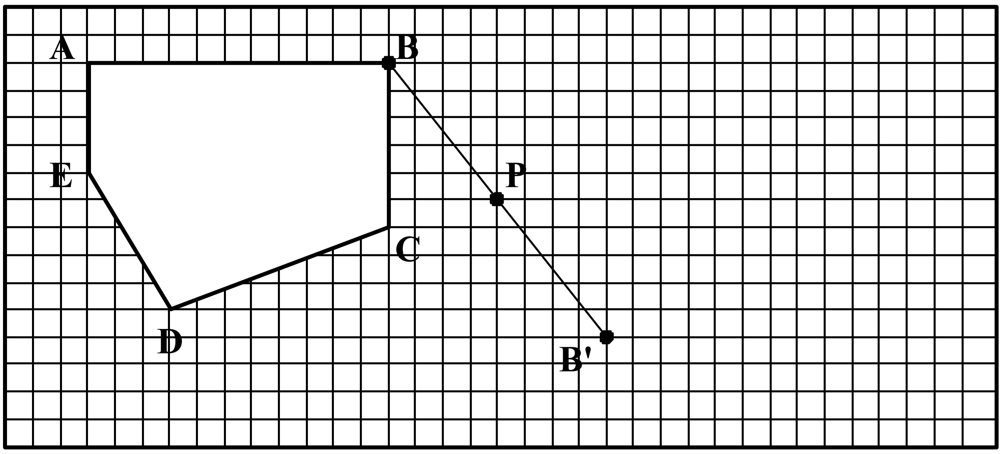


Nel piano sono stati disegnati due triangoli uguali ma disposti diversamente.
Traccia i segmenti AA', BB', CC'.

E' vero che s'incontrano tutti in uno stesso punto ?____

Questo punto d'incontro divide tutti i segmenti tracciati in due parti uguali ? ______________

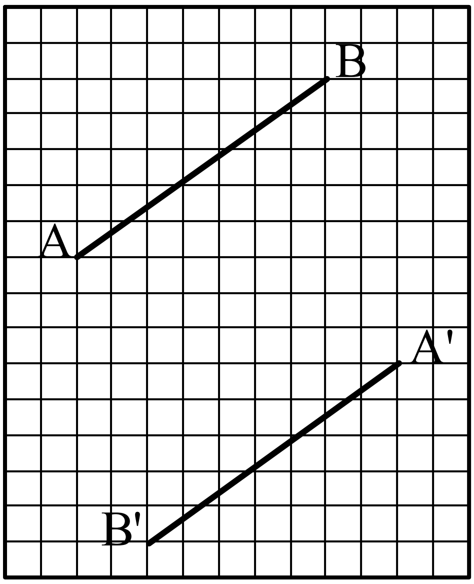
fig. 403

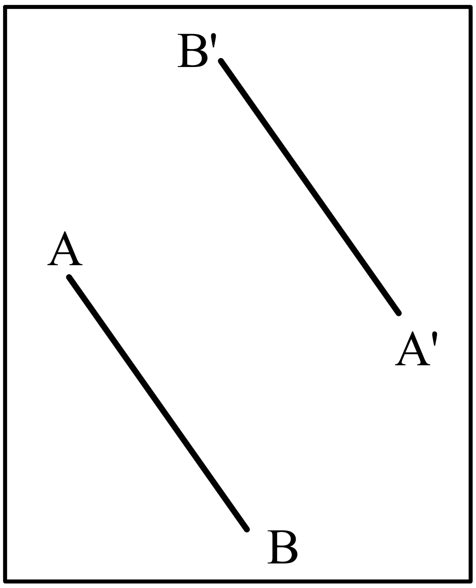


Trova i simmetri-ci di tutti i vertici del pentagono rispetto al punto centrale P.

Congiungi poi i punti trovati in modo da ottenere il pentagono simmetrico rispetto a P e coloralo.

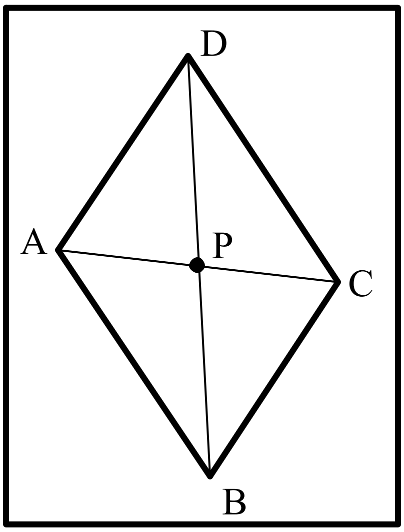
fig. 404





In ciascuno due piani sono stati disegnati i segmenti AB e A'B' simmetrici fra di loro rispetto ad un punto centrale.
Trova il centro della simmetria centrale in entrambi i casi.

fig. 405



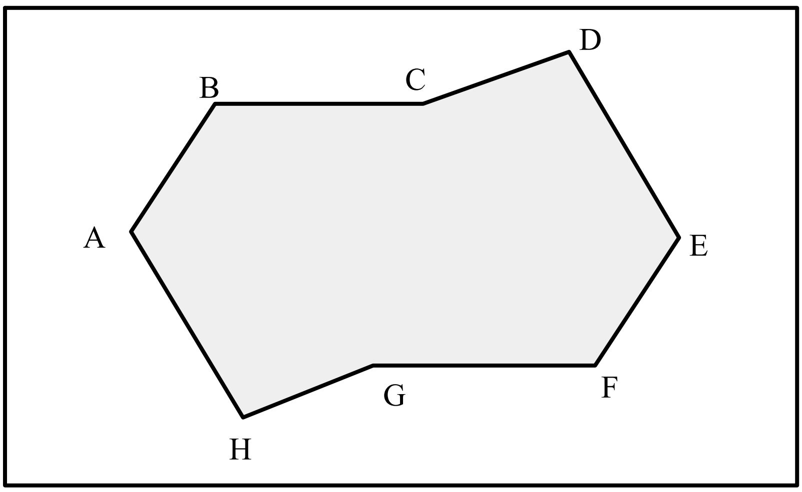
Nel parallelogrammo ABCD le diagonali si incontrano in un punto P.
E' vero che i lati opposti sono uno simmetrico all'altro rispetto al punto P ? ____________________

Qual è il simmetrico rispetto a P del triangolo ABP ? ______

Colora il triangolo ABP e il suo simmetrico con colori diversi.

Segna un punto E sul lato AB e trova il suo simmetrico F rispetto al punto P.
E' vero che F è un punto del lato CD ? ____________

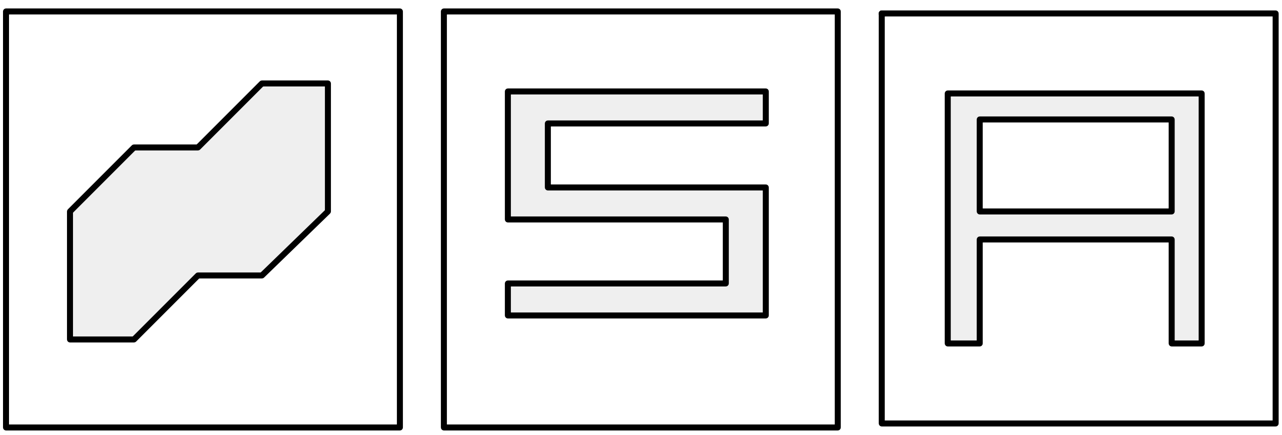
fig. 406



Nel piano è stato disegnato un ottagono concavo ABCDEFGH.
Trova il suo centro di simmetria e indicalo con P.

Colora di rosso la spezzata HABC e di blu la sua simmetrica rispetto al centro P.

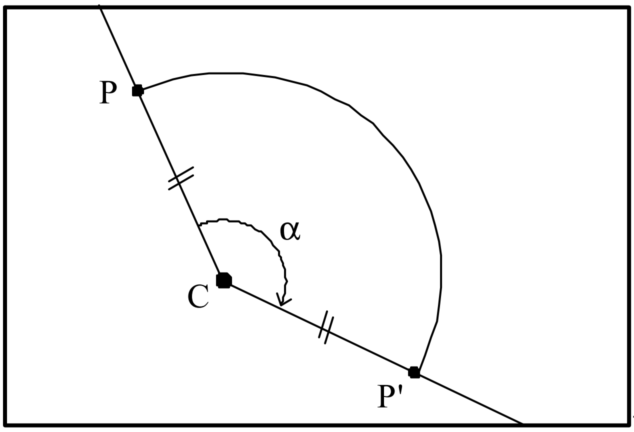
fig. 407



Delle tre figure, colora quella che non ha il punto di simmetria centrale. Evidenzia in ognuna delle altre figure il centro di simmetria centrale.

fig. 408

ROTAZIONE ATTORNO AD UN PUNTO



f

ig. 409

*Dati i punti **P** e **C**, il punto **P'** rotazione di **P** attorno a **C** di a°, si trova sulla semiretta che si ottiene ruotando la semiretta **CP** di a° attorno all'origine **C** (chiamata centro di rotazione) e tale che **P** e **P'** siano equidistanti da **C**.*

In pratica per ottenere **P'**, con il goniometro si individua dove passa la semiretta ruotata e, dopo averla tracciata, con il compasso di apertura **CP**, si trova il punto cercato.

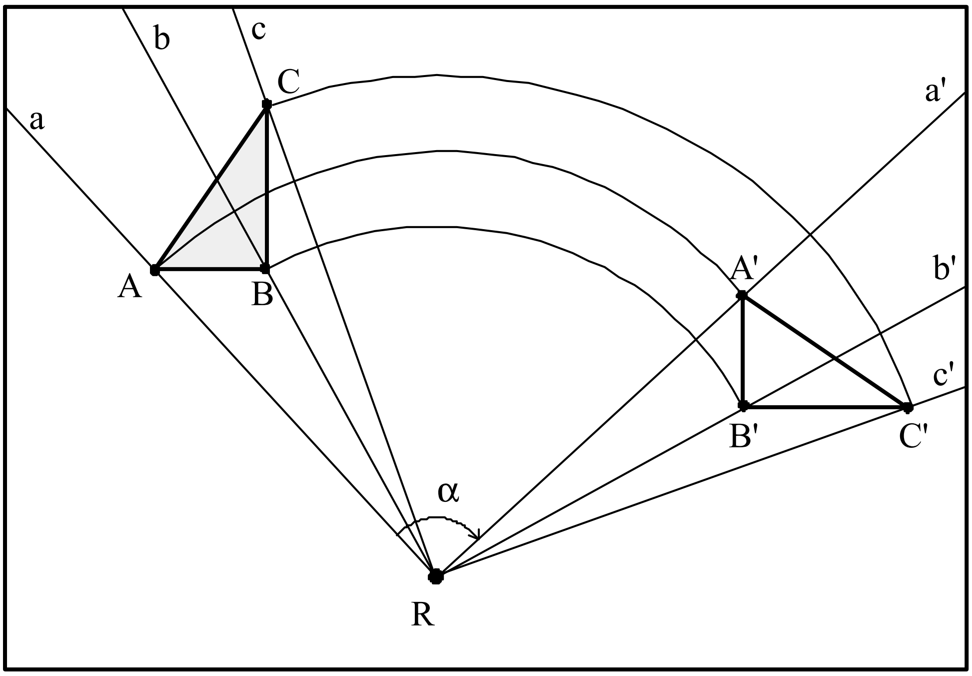
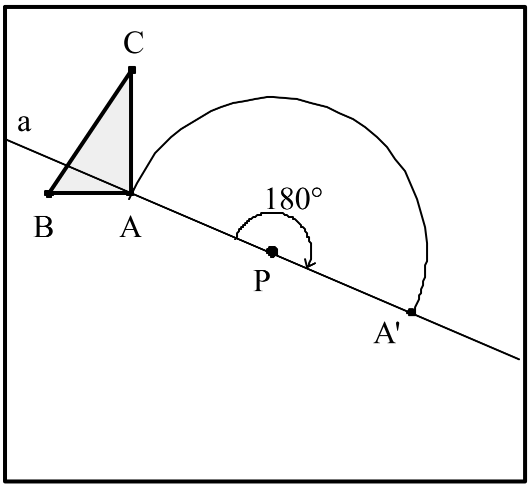


fig. 410

Per ruotare un poligono attorno ad un centro di rotazione assegnato, si trova la rotazione di ogni vertice e si congiungono i punti individuati.

Le rotazioni sono trasformazioni che mantengono tutte le metriche (lineari, di estensione, di ampiezza angolare), mantengo-no la forma e, in generale, mutano le posizioni e le direzioni.



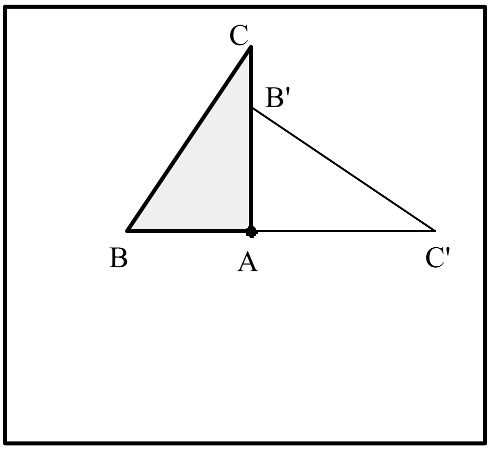
Ruota il triangolo ABC attorno al punto P di 180°.
Il triangolo A'B'C' ha lo stesso perimetro del triangolo ABC ? ________________________

Il triangolo A'B'C' si può considerare il simmetrico di ABC rispetto al punto P ? __________________

Se si ruota il triangolo A'B'C' di altri 180°, si ottiene un nuovo triangolo A''B''C''.
Dove va a collocarsi questo nuovo triangolo ?

____

fig. 411

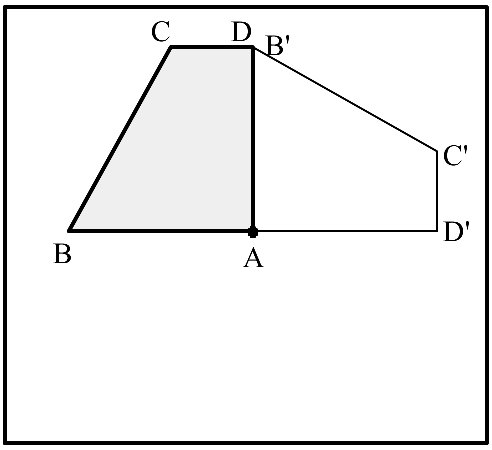


Il triangolo ABC deve essere ruotato attorno al ver-tice A di 90° per volta fino a quando si ritrova al punto di partenza.
Alla fine quanti triangoli hai ? ____________________

La figura formata da tutti questi triangoli che cosa ti ricorda ? ________________________________

Sapendo che i lati del triangolo sono: AB=6 cm, AC=12 cm, quanto è l'area dell'intera figura ? ______
Sapendo che CB=13,4 cm qual è il perimetro della intera figura ? ________________________________

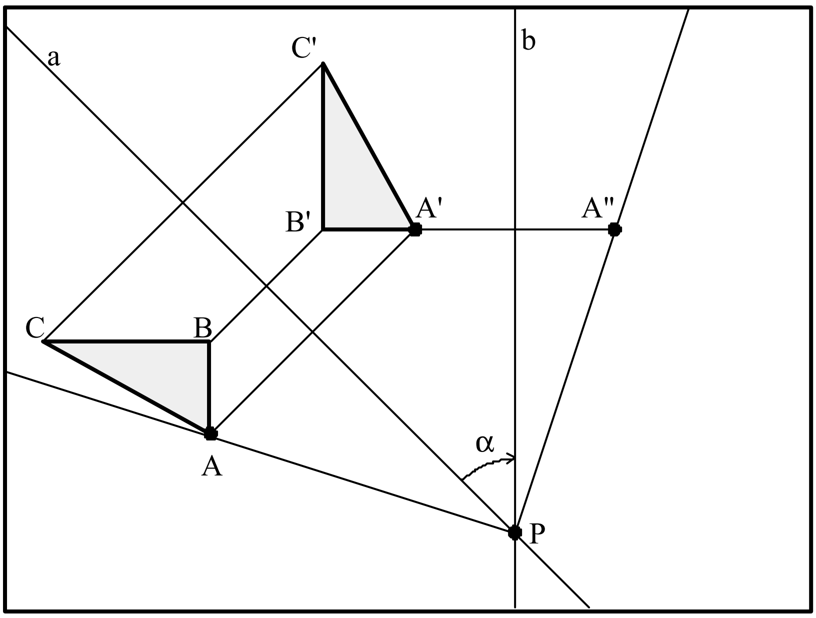
fig. 412



Il trapezio rettangolo ABCD ha la base maggiore uguale alla altezza e deve essere ruotato attorno al vertice A di 90° per volta fino a quando si ritrova al punto di partenza.
La figura formata da tutti questi trapezi quale poligono è ? ________________________________

Sapendo che la somma del lato obliquo con la base minore del trapezio è di 18 cm, quanto è il perimetro dell'intera figura ? ______________________________

fig. 413



Il triangolo A'B'C' è il simmetri-co del triangolo ABC rispetto all'asse a. Costruisci il triangolo A"B"C" simmetrico di A'B'C' rispetto all'asse b.
Misura l'ampiezza dei seguenti angoli: α = _________
APA" = _________
BPB" = _________
CPC" = _________

A"B"C" è la rotazione di ABC attorno a P di un angolo pari agli ultimi tre angoli misurati ?__________

Le due simmetrie consecutive equivalgono ad una rotazione di ampiezza pari a 2α ? _________

fig. 414

Procedendo in maniera analoga si può portare il bambino a scoprire che, se le rette **a** e **b** sono fra di loro perpendicolari, la doppia simmetria assiale dà come risultato una simmetria centrale, che è anche, per quanto detto prima, una rotazione di 180°.
Si passa ora a trasformazioni che mantengono la forma e il rapporto fra le lunghezze, ma non mantengono le lunghezze dei lati.

OMOTETIE CHE MANTENGONO LE DIREZIONI

Le trasformazioni finora affrontate ed ottenute attraverso procedure grafiche, mantengono tutte le metriche: perimetro, area e angoli non cambiano.
Esistono altre trasformazioni dove la figura trasfor-mata, pur mantenendo angoli, parallelismo e forma, non mantiene le lunghezze e le aree, ma queste risul-tano in rapporto con la figura di partenza (se un lato di un poligono, nella trasformazione, diventa di lunghezza tripla, anche tutti gli altri lati, nella trasformazione, triplicano la loro lunghezza).
Tra queste trasformazioni, la più semplice per il bambino risulta l'omotetia.

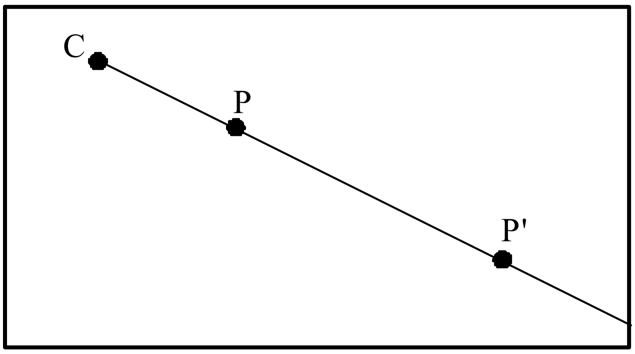


fig. 415

Dati i punti **P** e **C**, il punto **P'** è l'omotetico di **P** rispetto a **C** secondo il rapporto: a/b
se si trova sulla semiretta di origine **C** passante per **P** e se le distanze **P'C** e **PC** sono in rapporto: *a/b*

Ad esempio, se la lunghezza del segmento **P'C** è 3 volte la lunghezza del segmento **PC**, si dice che **P'** *è l'omotetico di* ***P*** *rispetto a* ***C*** *secondo il rapporto:*
3/1.

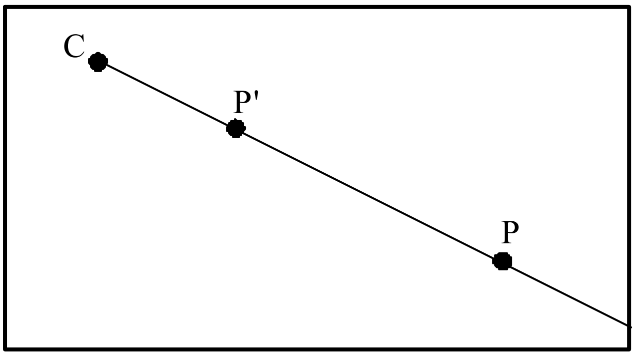
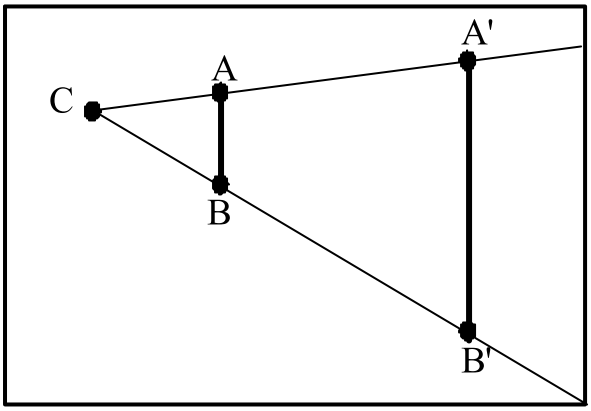


fig. 416

Analogamente:
Se il punto **P'** si trova fra il centro **C** dell'omotetia ed il punto **P** e, ad esempio, la lunghezza di **P'C** è la terza parte della lunghezza del segmento **PC**, si dice che:

P' *è l'omotetico di* ***P*** *rispetto a* ***C*** *secondo il rapporto:*
1/3.

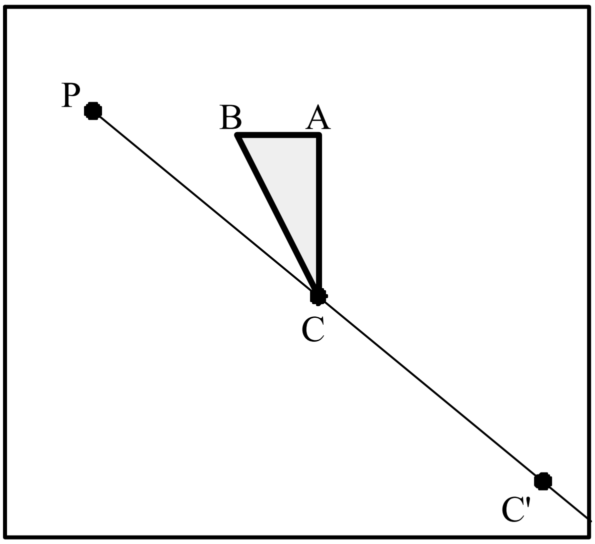


Il segmento A'B' è omotetico di AB rispetto a C secondo un rapporto. Esegui le seguenti misure:
A'C = mm______ AC = mm_____
Il rapporto di omotetia risulta perciò:
A'C / AC = _____ / _____

Essendo A'C il triplo di AC si può anche scrivere che: A'C / AC = 3 / 1

E' vero che: A'B' / AB = 3 / 1 ? _______

fig. 417

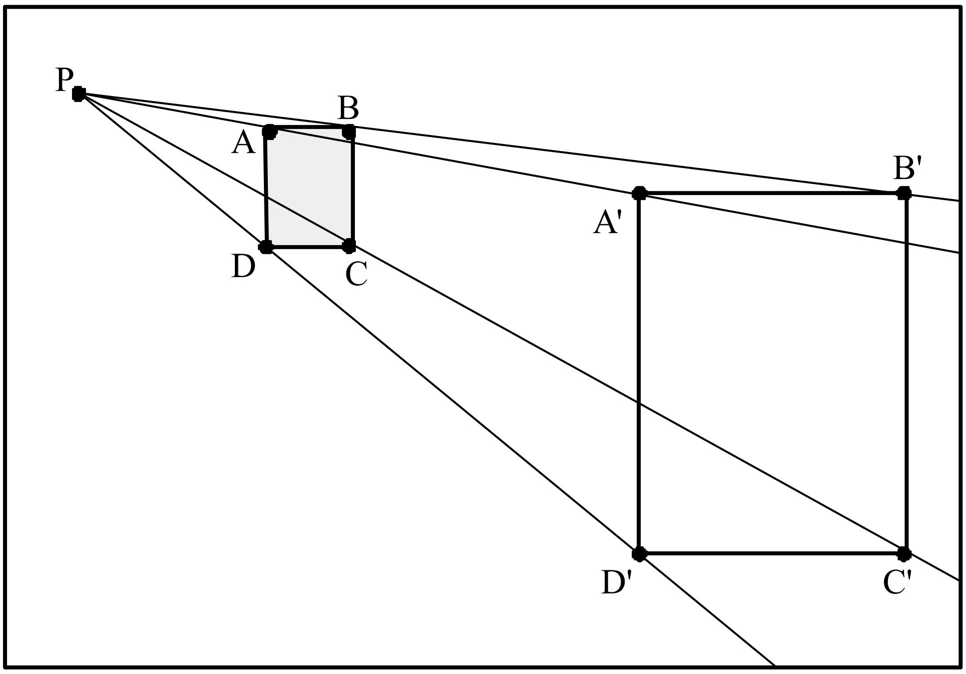


Costruisci il triangolo A'B'C' omotetico del triangolo ABC rispetto al punto P secondo il rapporto 2 / 1 (PC' è il doppio di PC).
Riporta le seguenti misure:

AB= mm_____	A'B'= mm_____
AC= mm_____	A'C'= mm_____
BC= mm_____	B'C'= mm_____
2p = mm_____	2p' = mm_____

E' vero che le lunghezze dei lati e del perimetro del triangolo A'B'C' sono doppie rispetto a quelle del triangolo ABC ? ________________
Le direzioni dei due triangoli sono le stesse ?
____

fig. 418



Nel piano è stata disegnata l'omotetia di un rettangolo ABCD rispetto a P secondo il rapporto 3 / 1.
Misura base e altezza del rettangolo ABCD: AB = mm_______ BC = mm_______

Calcola le misure del rettangolo A'B'C'D' sfruttando il rapporto di omotetia 3 / 1 (non devi trovare le misure con il righello, ma con una operazione) : A'B' = mm_______ B'C' = mm_______

Trova i perimetri e verifica che il loro rapporto è uguale a quello dell'omotetia:

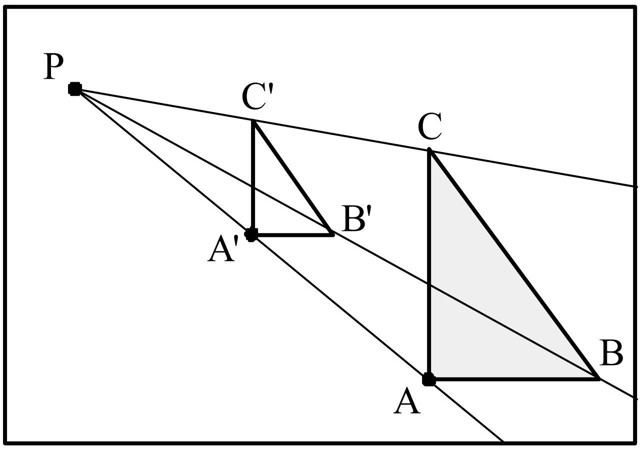
2p(A'B'C'D') / 2p(ABCD) = mm_______ / mm_______ = 3 / 1

Trova le aree e verifica che il loro rapporto è uguale a quadrato del rapporto di omotetia:

Area(A'B'C'D') / Area(ABCD) = mm^2_______ / mm^2_______ = 9 / 1 = $(3 / 1)^2$

Disegna nel rettangolo A'B'C'D' i 9 rettangoli uguali a rettangolo ABCD.

fig. 419



Effettua le seguenti misure:
A'P = mm_______ AP = mm_______

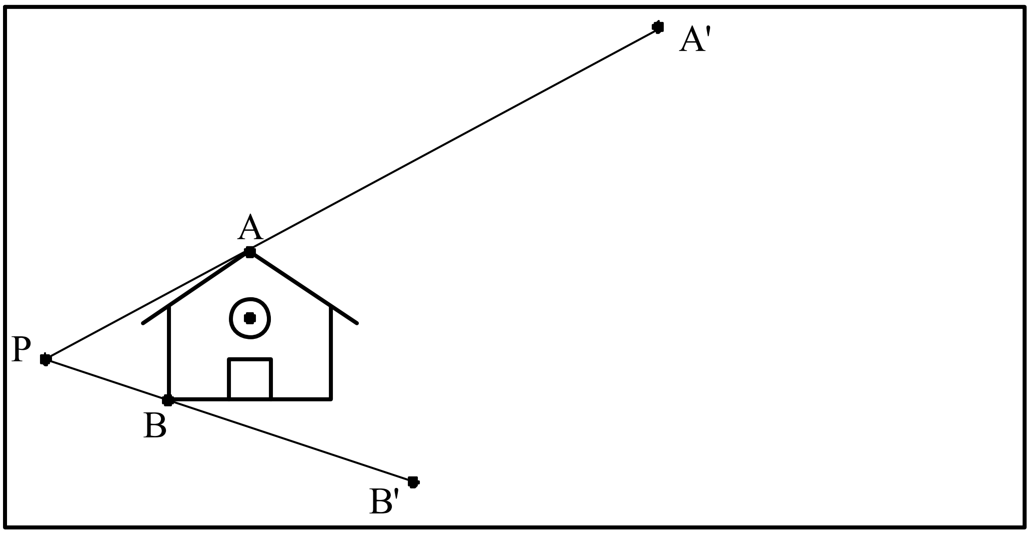
E' vero che A'P è la metà di AP ? __________

Qual è il rapporto di omotetia ?
A'P / AP = mm______ / mm______ = __ / __

Il rapporto di omotetia 2 / 1 è diverso dal rapporto di omotetia 1 / 2 ? _______________

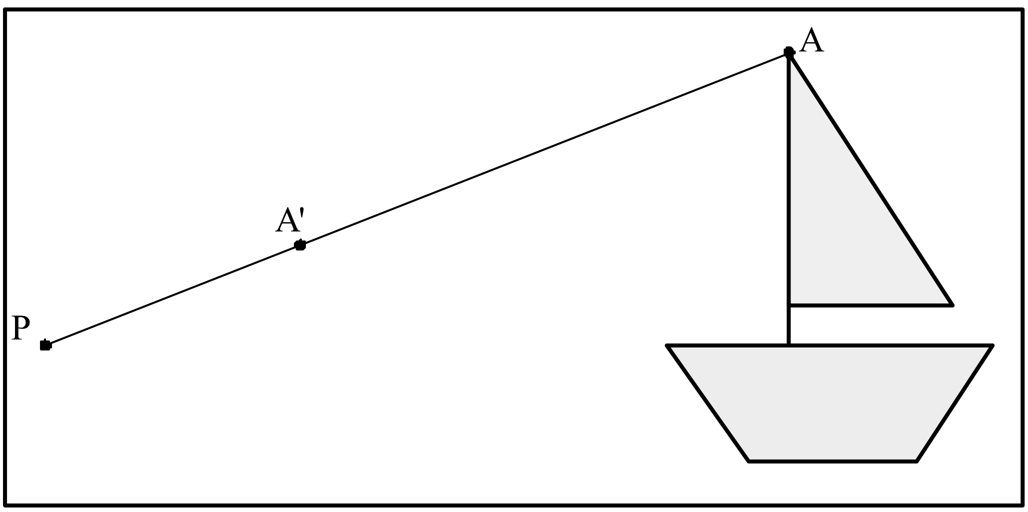
Disegna l'omotetia A"B"C" di ABC ripsetto al punto P secondo il rapporto 1 / 4.
Il nuovo triangolo A"B"C" ha i lati che sono la metà dei corrispondenti lati di A'B'C' ? __________

fig. 420



Disegna la figura omotetica alla facciata della casa rispetto al punto P secondo il rapporto :
3 / 1

fig. 421



Completa la seguente omotetia fatta rispetto al punto P..

fig. 422

OMOTETIE CHE INVERTONO LE DIREZIONI

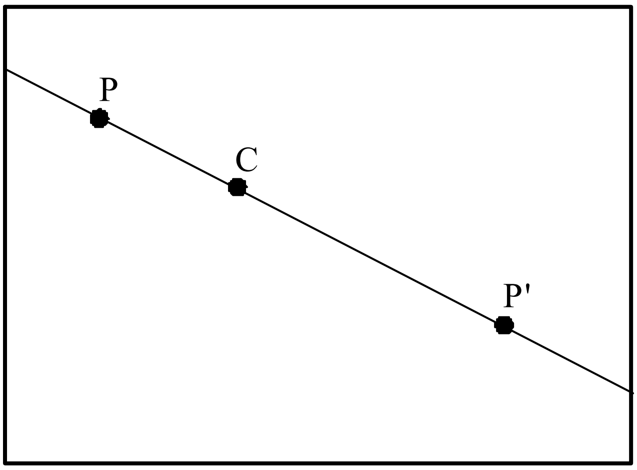


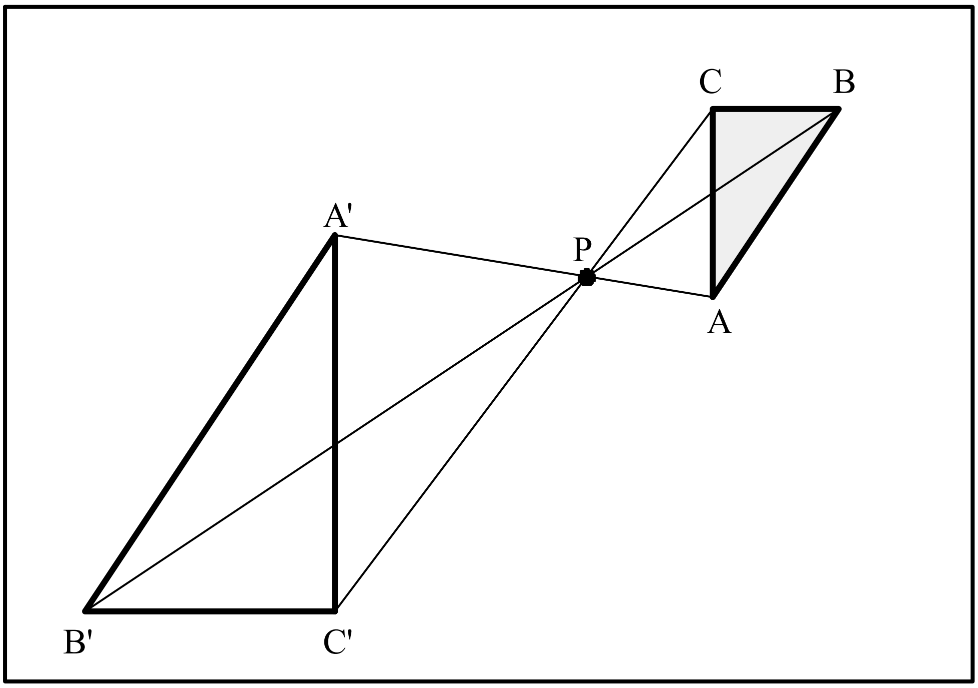
fig. 423

Sono analoghe alle omotetie descritte precedentemente con un'unica differenza: il punto omotetico non si trova sulla semiretta di origine C e passante per P, ma sulla semiretta opposta.

Nel disegno a fianco la lunghezza di **P'C** è 2 volte la lunghezza di **PC**, quindi: ***P'*** *è omotetico di* ***P*** *rispetto a* ***C*** *secondo il rapporto*:

-2 / 1

Quando il rapporto omotetico è positivo, allora **P'** e **P** sono nella stessa direzione rispetto a **C**, se è negativo, allora **P'** e **P** sono su direzioni opposte rispetto a **C**.



L'omotetia disegnata ha un rapporto negativo. Verifica misurando i lati se risulta -2 / 1.

A'P = mm_______ AP = mm_______ -A'P / AP = -mm______ / mm______ = -__ / __

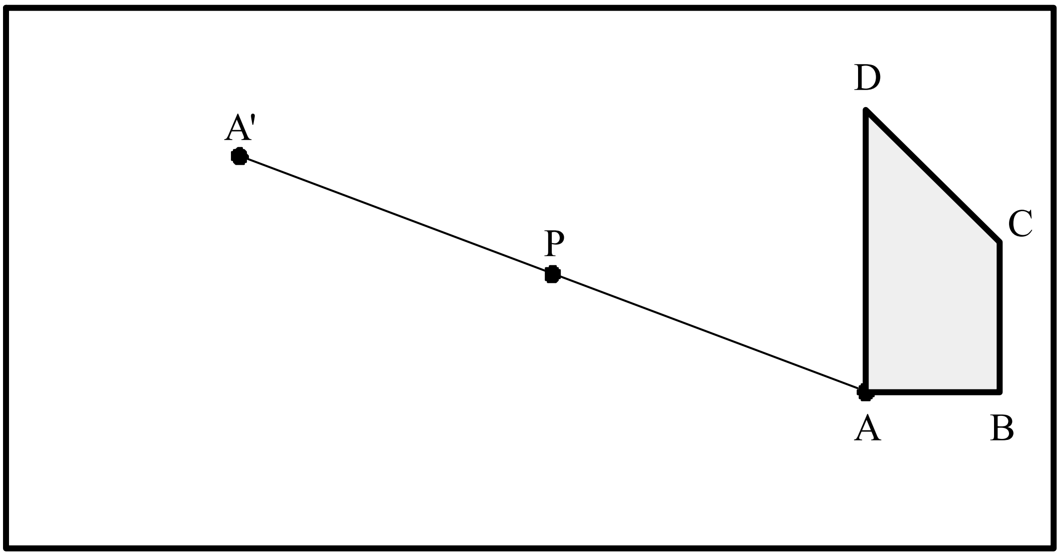
Quanti triangoli ABC occorrono per ricoprire il triangolo A'B'C' ? _______ Disegnali.

Il segmento che inizia in A e termina in B ha la stessa direzione del segmento che inizia in A' e termina in B' ? _________________

Il punto B è a destra del lato AC, il punto B' dove si trova rispetto al lato A'C' ? _______________

Il punto A è sotto il lato BC, il punto A' dove si trova rispetto al lato B'C' ? ___________________

fig. 424



Traccia l'omotetico del trapezio ABCD rispetto al punto P secondo il rapporto di omotetia -1 / 1.

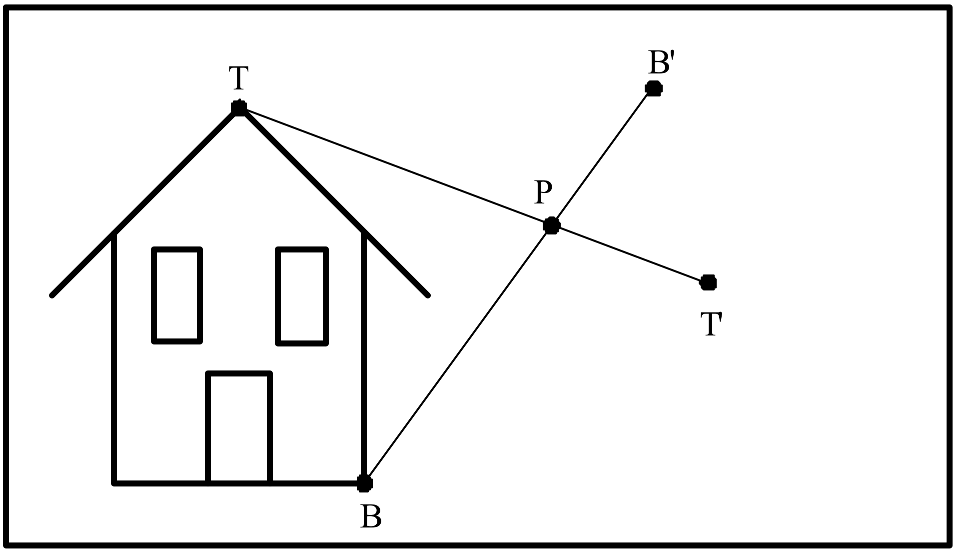
Il trapezio A'B'C'D' ha lo stesso perimetro del trapezio ABCD ? ____________________________

Nell'orientamento che cosa cambia dal trapezio ABCD al trapezio A'B'C'D' ?

____

Questa omotetia è anche una simmetria centrale ? _______________________________________

fig. 425



Completa l'omotetia della casa rispetto al punto P secondo il rapporto: -1 / 2

fig. 426

OSSERVAZIONI: Ciò che avviene con una macchina fotografica o con una camera oscura dove è stato praticato un foro stenopeico è una forma di omotetia. In questo caso il centro dell'omotetia è il foro stenopeico, l'immagine è da una parte del foro e il soggetto è dall'altra parte; le direzioni dell'immagine e del soggetto sono opposte e l'immagine è in rapporto con il soggetto.

19. RAPPORTI COSTANTI IN GEOMETRIA

I RAPPORTI NELLA REALTA'

*Per **rapporto** si intende una relazione fra due realtà delle quali la prima rappresenta il soggetto, mentre la seconda il riferimento.*

Rapporti che fanno parte della realtà quotidiana sono, ad esempio:

- **Velocità**: *rapporto fra spazio e tempo, è cioè lo spazio collocato in ambiente temporale* (spazio soggetto, tempo riferimento).
  Ad esempio: Un percorso di 6 Km ha un significato, percorrere 6 Km ogni 2 ore significa sempre esprimere una lunghezza ma in un contesto temporale (al trascorrere di 1 ora vengono percorsi 3 Km).
- **Cambio**: *rapporto tra una realtà ceduta e un'altra ricevuta, cioè quanto dato ogni quanto ricevuto*.
  Ad esempio: Dare 7000 Lit ha un significato, dare 7000 Lit per ogni 5 Kg di mele significa sempre esprimere una quantità di soldi da dare ma in contesto di scambio con le mele (al negoziante verranno date 7000 Lit per ogni 5 Kg di mele ricevute).
- **Percentuale**: *rapporto fra la parte e il tutto quando il tutto è la quantità 100*.
  Ad esempio: Pagare 9000 Lit un libro significa aver fatto uno scambio con il libraio, pagare 9000 Lit un libro che ne costa 10000 significa dare al libraio 90 Lit ogni 100 Lit di costo.
- **Consumo**: *rapporto fra la realtà consumata e la realtà realizzata*.
  Ad esempio: 5 litri di benzina ha un significato quantitativo, consumare 5 litri di benzina per percorrere con una automobile 100 Km significa esprimere sempre una quantità di benzina ma rapportata alla lunghezza di un percorso (per ogni litro consumato viene realizzato un percorso di 20 Km).
- **Scala**: *rapporto tra le dimensioni lineari dell'immagine e le dimensioni lineari della realtà rappresentata*.
  Ad esempio: Se su di una carta topografica si legge la scala 1:70000, significa che 1 cm dell'immagine corrisponde a 70000 cm della realtà rappresentata.

I rapporti, in generale, si esprimono con coppie di numeri separati dal simbolo linea di frazione:

$$\frac{a}{b}$$

significa che una quantità **a** della realtà soggetto viene rapportata con una quantità **b** della realtà riferimento secondo la legge "*tanti a per ogni b*".

Quindi:

$$\frac{\textit{3 giochi}}{\textit{1 stanza}}$$

significa 3 giochi per ogni stanza.

$$\frac{\textit{23 cucchiainidi zucchero}}{\textit{15 tazzine di caffé}}$$

significa che per dolcificare il caffè si usano 23 cucchiaini di zucchero per ogni 15 tazzine di caffè.

$$\frac{\textit{3 uova}}{\textit{7 hg di farina}}$$

significa che per fare l'impasto occorrono 3 uova per ogni 7 hg di farina.

*Due **rapporti** sono **equivalenti** quando, riportati ad un medesimo riferimento, le realtà soggetto coincidono.*

Ad esempio:

$$\frac{\textit{4 Km}}{\textit{6 ore}} \quad \frac{\textit{6 Km}}{\textit{9 ore}}$$

esprimono rapporti (veloci-tà) uguali o diversi ?

Per confrontarli occorre porre la realtà temporale uguale per entrambi:

1° caso: 4 Km ogni 6 ore significa anche 8 Km ogni 12 ore, 12 Km ogni 18 ore, ecc.

2° caso: 6 Km ogni 9 ore significa anche 12 Km ogni 18 ore, 18 Km ogni 27 ore, ecc.
Facendo riferimento alle 18 ore si vede che i percorsi coincidono (12 Km), pertanto le due velocità sono uguali.

Frazioni equivalenti esprimono rapporti uguali e, ad esempio, il rapporto "2 ogni 3" può essere espresso attraverso infinite frazioni equivalenti:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{10}{15} \quad \ldots$$

cioè: *"2 ogni 3" significa che il soggetto aumenta di 2 ogni volta che il riferimento aumenta di 3.*

RAPPRESENTAZIONE DEI RAPPORTI

Per i bambini è difficile conquistare il concetto di rapporto attraverso un linguaggio quasi esclusiva-mente numerico.
Occorre perciò dare forma ed immagine al rapporto. L'uso di forme linguistiche iconografiche ed ideografiche consente di visualizzare meglio le realtà in rapporto e quindi di scoprire più facilmente tale rapporto.

PROBLEMA:
Gigi possiede 12 figurine di calciatori e le scambia con Aldo che ha figurine di automobilismo. Sapendo che lo scambio permette di ricevere 2 figurine di automobilismo per ogni 3 di calciatori, quante figurine di automobilismo avrà Gigi dando tutte le sue 12 figurine di calciatori?

La soluzione è unica ma può essere ottenuta ed espressa in tanti modi:

1° modo:

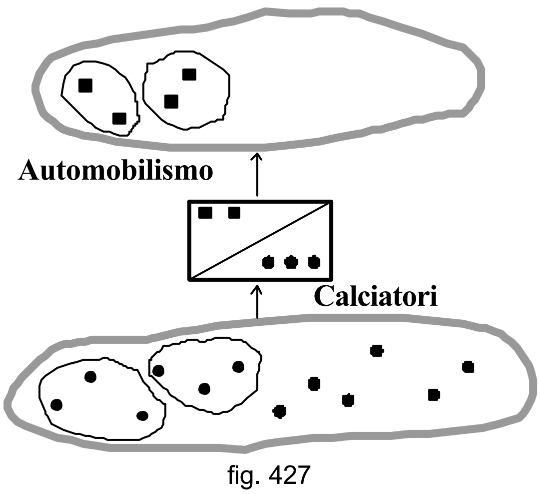


fig. 427

Soluzione ottenuta con i diagrammi di Eulero Venn. Il rapporto 2/3 viene inizializzato a livello grafico con la "macchina del cambio" di forma rettangolare posta fra i due insiemi.
E' necessario porre in alto l'insieme dell'automobili-smo perché è il soggetto del problema (la richiesta è sulle figurine di automobilismo), le figurine di calciatori sono il riferimento. I rapporti 2/3 e 3/2 non sono uguali, quindi anche l'ordine va rispettato.

2° modo:

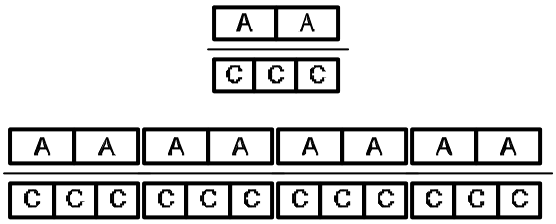


fig. 428

Ripetendo il primo rapporto iconografico fino a quan-do le figurine dei calciatori diventano 12 si ottiene che le figurine di automobilismo sono 8.

3° modo:

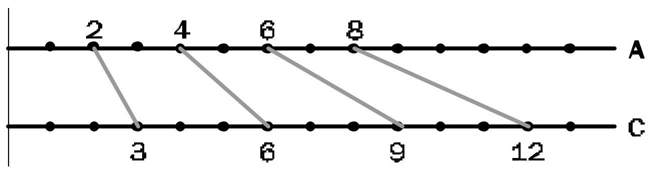


fig. 429

L'uso del binario fatto con una doppia linea dei numeri permette di visualizzare il "2A ogni 3C" come relazione di rapporto che di volta in volta si evolve passando da 2/3 a 4/6 a 6/9 a 8/12.

4° modo:

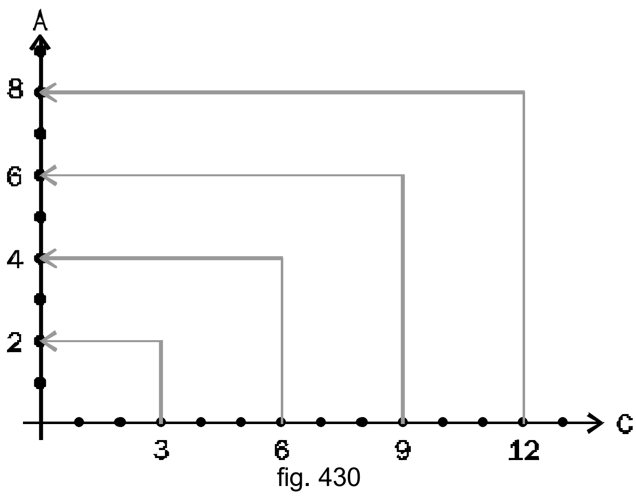


fig. 430

Anche il piano cartesiano permette di esprimere le relazioni di rapporto fra due realtà. L'iconografia dei rapporti (aspetto delle frazioni equivalenti) non è più

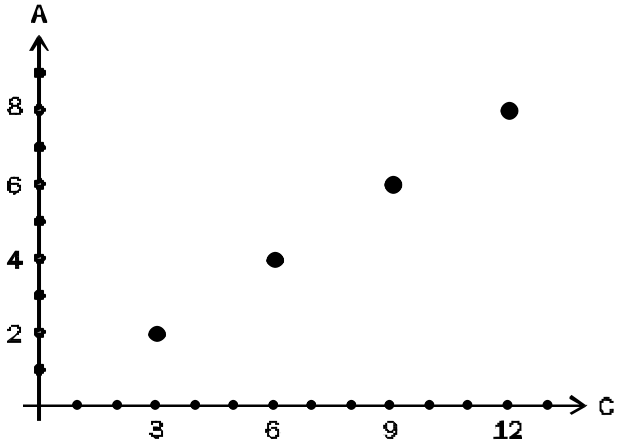


fig. 431

così evidente, specialmente se si sostituiscono le frecce ad angolo con i punti del vertice, ma i bambini con l'età mentale della classe 5^ possono incomin-ciare ad affrontare anche tali strumenti per esprimere le realtà relazionate fra di loro.

5° modo:

$$\frac{2\,A}{3\,C} = \frac{4\,A}{6\,C} = \frac{6\,A}{9\,C} = \frac{8\,A}{12\,C}$$

Il linguaggio simbolico matematico è decisamente più compatto ed evidenzia, tramite la catena di ugua-glianze, il fatto che il rapporto si evolve e che 2/3 e 8/12 esprimono lo stesso rapporto.

6° modo:

$$2\,A : 3\,C = X : 12\,C$$

$$X = \frac{2\,A \cdot 12\,C}{3\,C}$$

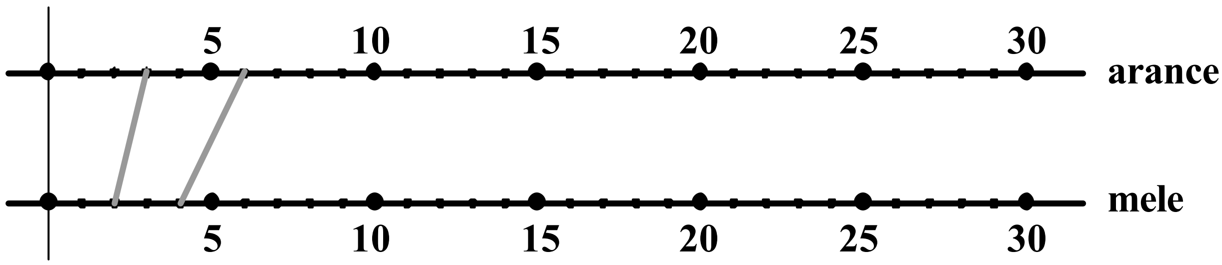
Le proporzioni esprimono in modo molto compatto e con una notevole potenzialità operativa i rapporti fra realtà.

Fra i diversi modi esposti per rappresentare il rapporto in oggetto, per gli obiettivi della geometria, è preferibile lavorare con il 3° o con il 4° metodo.

Si possono allora proporre schede che riportano il testo del problema ed uno schema grafico predisposto per sviluppare i rapporti. Successivamente si possono porre ulteriori domande per favorire l'approfondimento del rapporto trattato.

PROBLEMA:
Un fruttivendolo prepara delle confezioni di frutta mettendo 3 arance per ogni 2 mele. Sapendo che in ogni confezione ci sono 12 mele, quante arance ci saranno ?

RISOLUZIONE:
Completa lo schema tracciando i segmenti che esprimono i successivi momenti del rapporto fra le arance e le mele e riporta i valori numerici:



$$\frac{\textit{arance}}{\textit{mele}} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

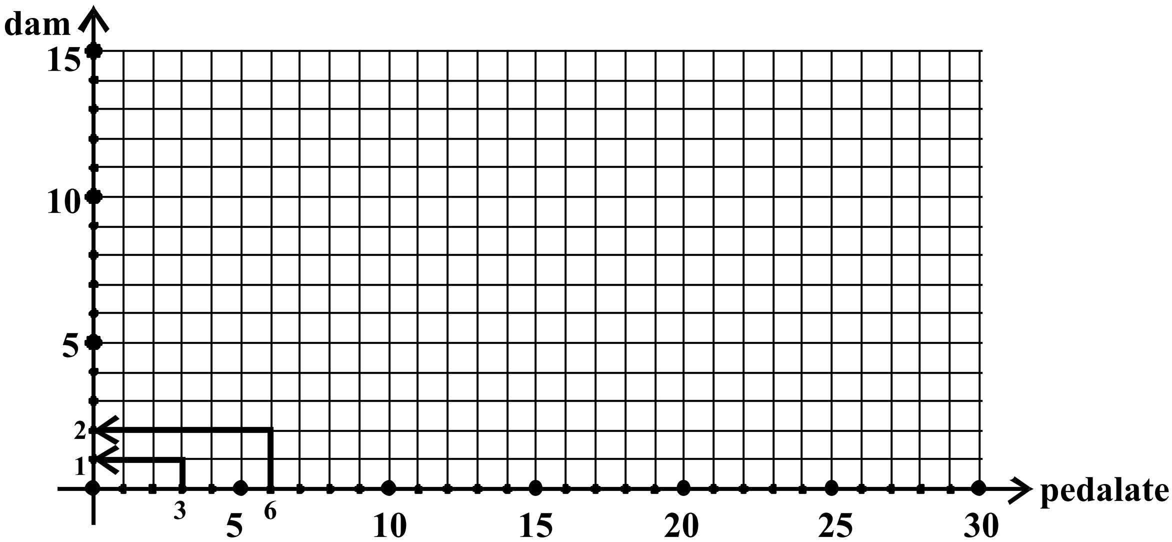
RISPOSTA:
Le arance per ogni confezione sono : ______________________________

fig. 432

Quando i bambini hanno finito di compilare la scheda della fig. 432, l'insegnante può approfondire il discor-so dei rapporti con altre domande, come ad esempio:
- Quanti sono in tutto i frutti per ogni confezione?
- Se nella confezione ci fossero state 8 mele, quante arance avrebbe dovuto mettere il fruttivendolo?
- Se in ogni confezione avesse messo il doppio delle mele, quante arance avrebbe dovuto mettere?
- Se avesse messo nella confezione 6 arance per ogni 4 mele, avrebbe ottenuto lo stesso risultato?

PROBLEMA:
Con la bicicletta Fulvio percorre 1 dam per ogni 3 pedalate. Quanti dam percorre dopo aver fatto 24 pedalate ?

RISOLUZIONE:
Completa il grafico cartesiano e registra il rapporto fra la distanza coperta e le pedalate fatte:



$$\frac{dam}{pedalate} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$$

RISPOSTA:
I dam percorsi dopo 24 pedalate sono : ______________________

Completa il grafico cartesiano sottostante usando i punti al posto delle frecce ad angolo:

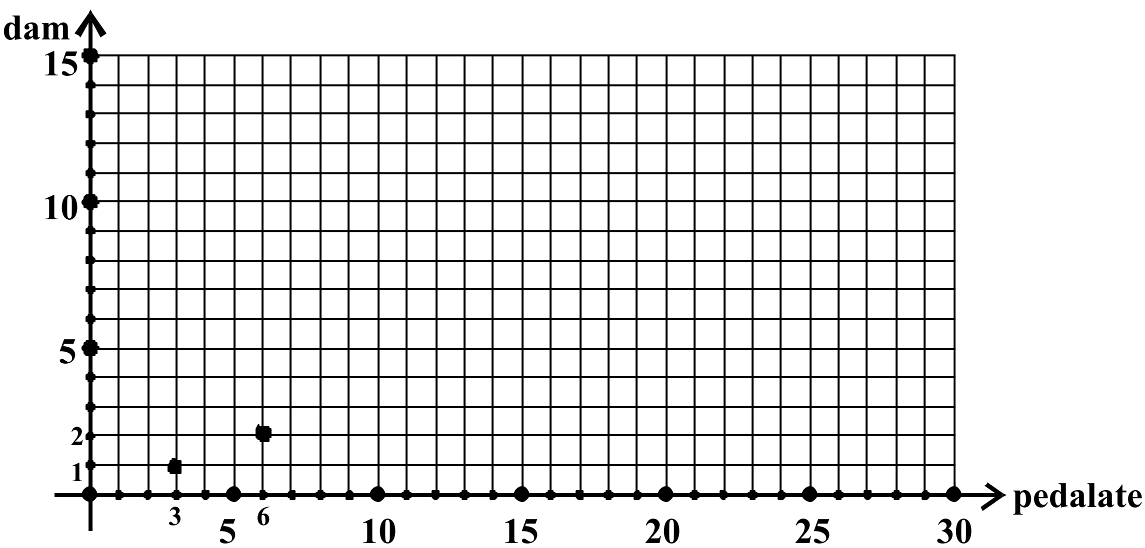
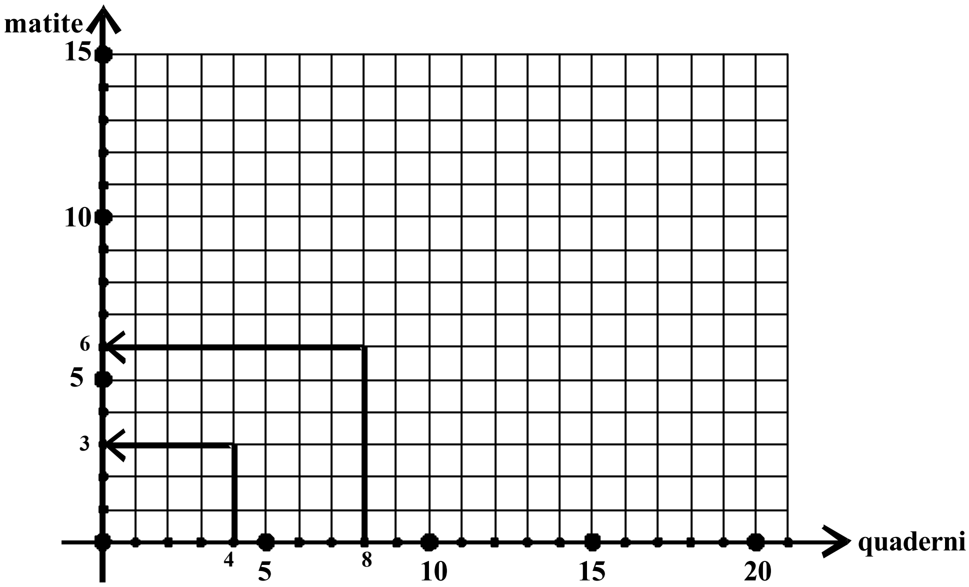


fig. 433

PROBLEMA:
In un negozio regalano 3 matite per ogni 4 quaderni comprati. Quante matite vengono regalate comprando 20 quaderni ?

RISOLUZIONE:
Completa il grafico cartesiano e registra il rapporto fra le matite regalate e i quaderni comprati:



$$\frac{matite}{quaderni} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_$$

RISPOSTA:
Le matite avute in regalo sono : ________________________________

Partendo dal numero dei quaderni via via trovati sopra, traccia una linea verticale fino dove questa incontra la linea obliqua e poi prosegui orizzontalmente verso il numero delle matite.
E' vero che si ottengono i rapporti ottenuti prima ? ________________________

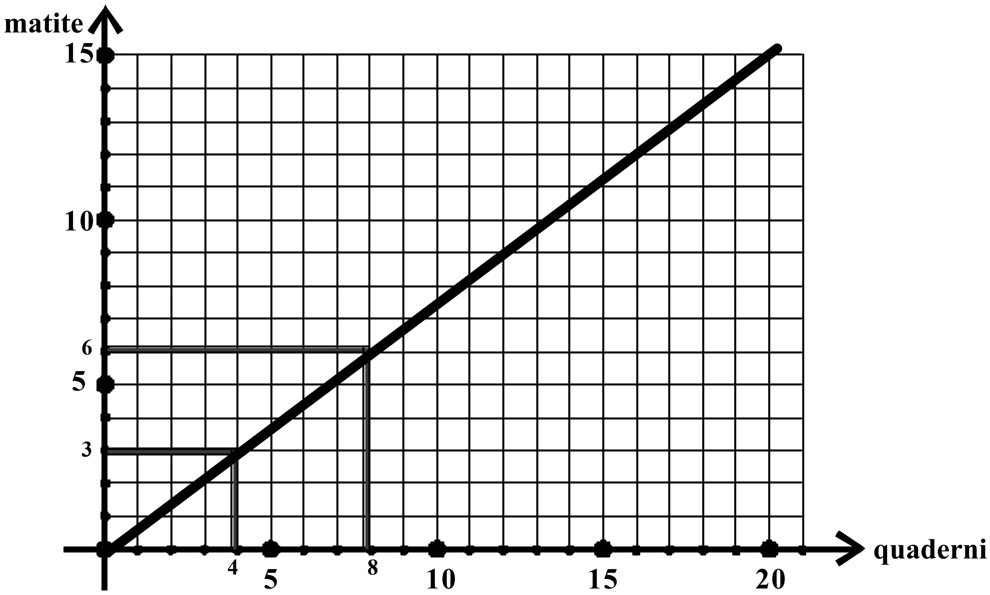


fig. 434

Si trovano rapporti in tutti gli ambiti della realtà e quindi si possono proporre facilmente esempi, situa-zioni, problemi adeguati e accessibili ai bambini.
In geometria, i rapporti riguardano principalmente le questioni metriche e, in particolare, nella scuola elementare, conviene limitarsi alle metriche lineari.

Rapportando lunghezze con lunghezze, non è più necessario specificare l'unità di misura. Infatti, se due segmenti sono in rapporto **4/3**, cioè:

$$\frac{\textit{lunghezza di AB}}{\textit{lunghezza di CD}} = \frac{4}{3}$$

allora ad ogni 4 cm di AB corrispondono 3 cm di CD, oppure, indifferentemente, ad ogni 4 Km di AB corrispondono 3 Km di CD.
Questi tipi di rapporti sono omogenei e non necessitano dell'esplicitazione delle marche o delle unità di misura usate.

I RAPPORTI E I NUMERI DECIMALI

Per raggiungere gli obiettivi indicati si useranno le grandezze geometriche ed in particolare le lunghezze e le distanze.

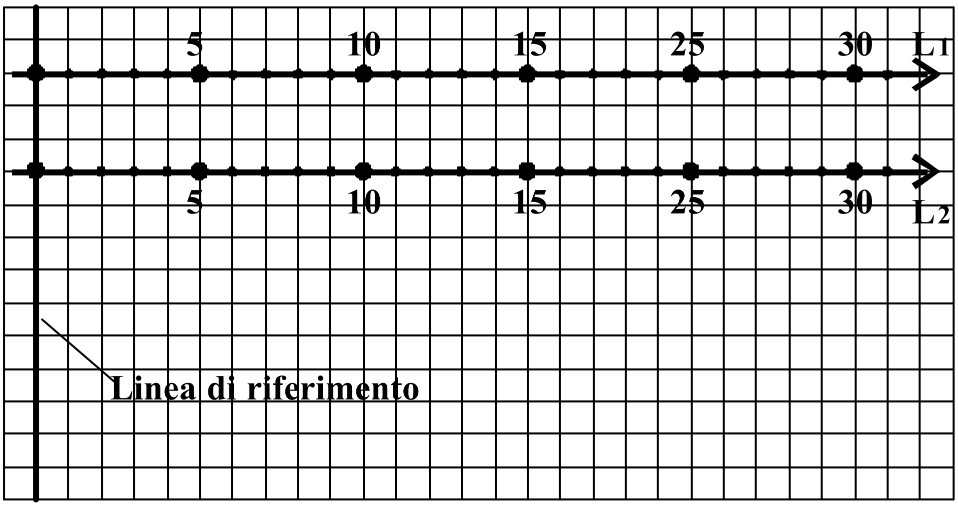


fig. 435

Si consideri la struttura fatta con due linee parallele riportanti le distanze dall'origine di ciascuna linea secondo l'unità di misura adeguata.
Il rapporto **4/3** fra le lunghezze **L_1** e **L_2** significa che a 4 unità di **L_1** corrispondono 3 unità di **L_2**.

Questo rapporto viene visualizzato (vedere figura 435) con una linea che congiunge il valore 4 di **L_1** col valore 3 di **L_2** e prosegue fino ad incontrare la linea di riferimento in un punto **P**.

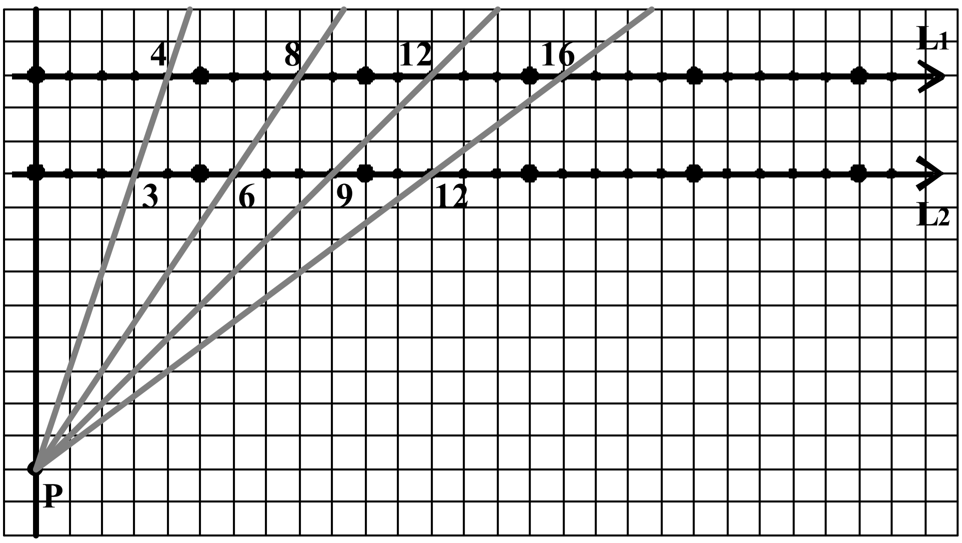
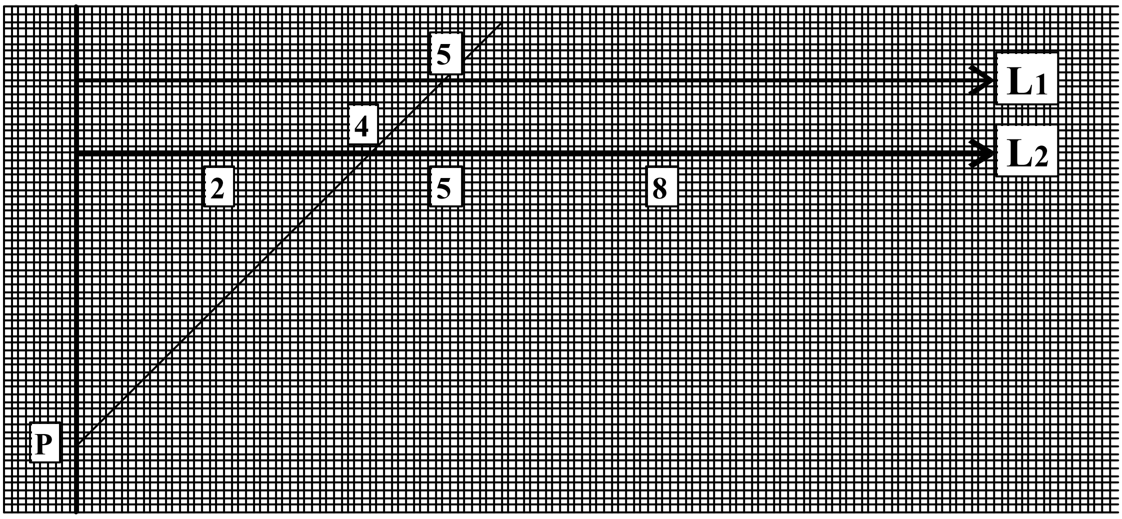


fig. 436

Se dal punto **P** viene tracciata un'altra linea che taglia **L1** in 8, allora **L2** necessariamente viene tagliata in 6. Analogamente la linea che taglia **L1** in 12 taglia **L2** in 9 e così via.
Questo significa che qualunque linea uscente da **P** che incontri **L1** e **L2** determina due valori il cui rapporto equivale a **4/3**.
Per introdurre i numeri decimali nei rapporti è opportuno, all'inizio, utilizzare il metodo grafico appena esemplificato usando carta millimetrata.

Nel grafico sottostante viene espresso il rapporto 5/4 (5 unità di L1 per ogni 4 unità di L2)

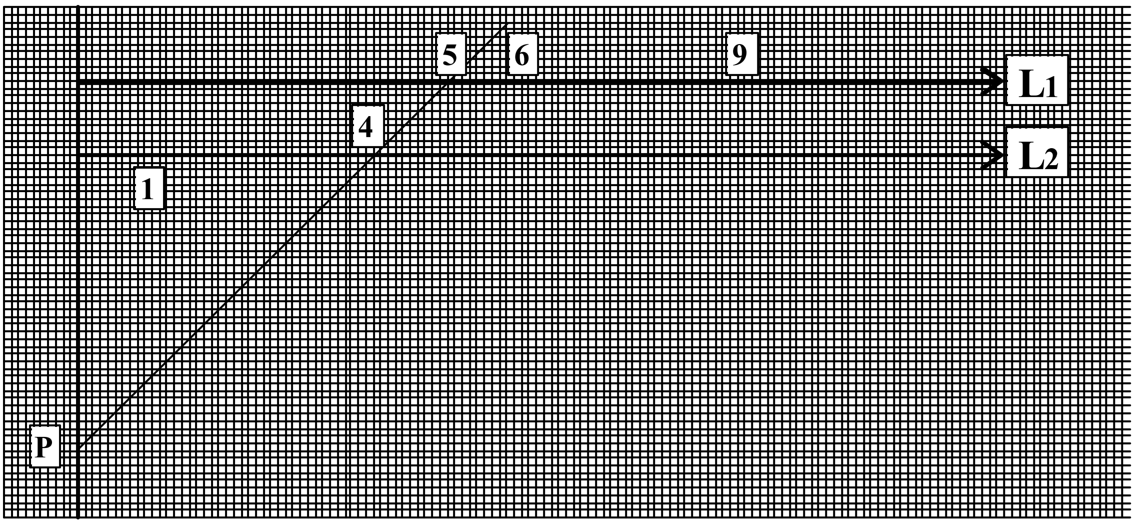


Tracciando le opportune linee, trova i valori e completa i seguenti rapporti equivalenti:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{5}{4} = \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{5} = \frac{\quad}{2}$$

Due di questi rapporti devono essere espressi utilizzando anche i numeri decimali ? ___________

Procedendo in maniera analoga completa le parti sottostanti:



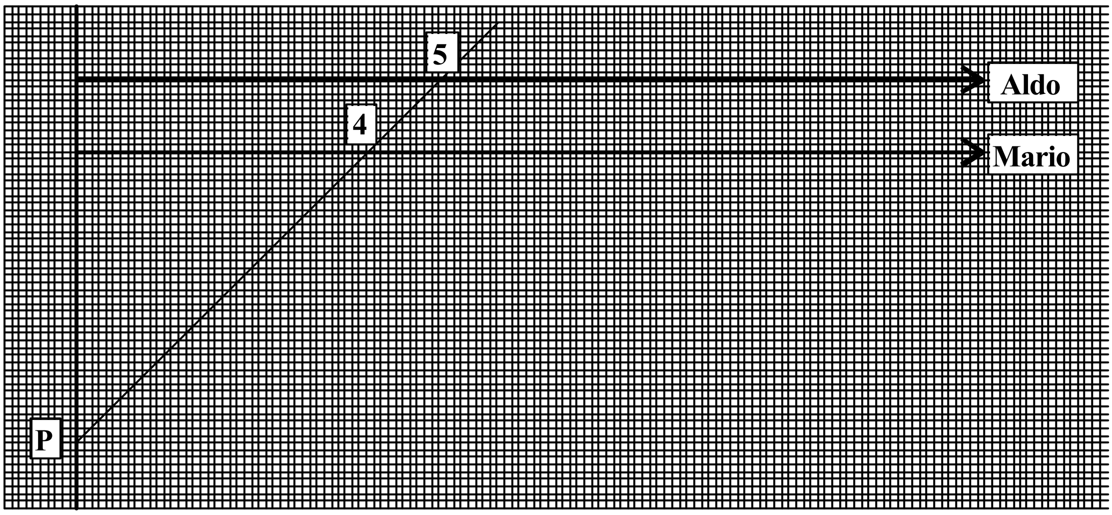
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{5}{4} = \frac{\quad}{1} = \frac{6}{\quad} = \frac{9}{\quad}$$

fig. 437

Questi rapporti che utilizzano i numeri decimali devono essere proposti al bambino attraverso problemi ed esemplificazioni.

PROBLEMA:
Durante una corsa Aldo percorre 5 dam mentre Mario ne percorre 4. Quanti dam avrà percorso Aldo quando Mario avrà completato 1 Km ?

RISOLUZIONE:
Trova la risposta tracciando, nel grafico sottostante, la linea opportuna.



RISPOSTA:
Aldo avrà percorso : dam ______________________________

Completa i rapporti sottostanti:

$$\frac{\text{percorso di Aldo}}{\text{percorso di Mario}} = \frac{5\,dam}{4\,dam} = \frac{\quad dam}{2\,dam} = \frac{\quad dam}{6\,dam} = \frac{\quad dam}{8\,dam} = \frac{\quad dam}{1\,dam} = \frac{9\,dam}{\quad dam} = \frac{11\,dam}{\quad dam}$$

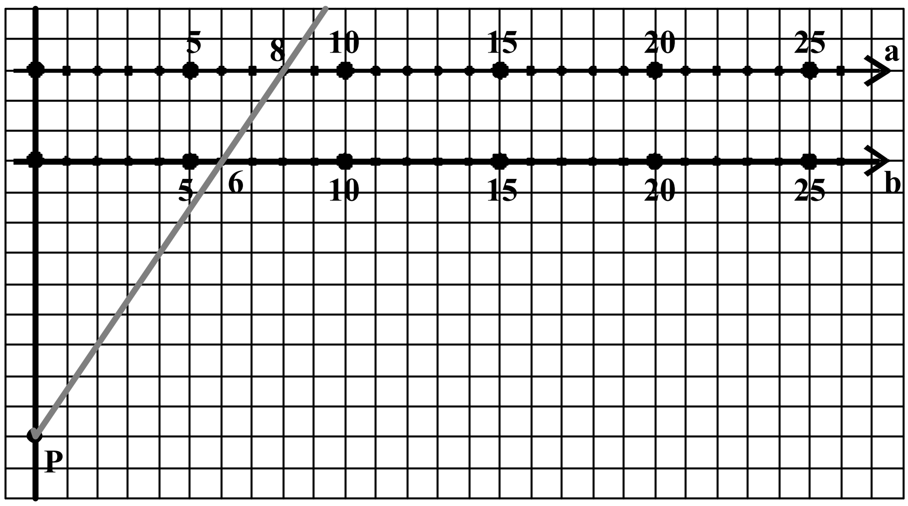
Quale distanza ha percorso Mario quando Aldo taglia il traguardo che si trova a 13 dam ? _______

fig. 438

Fra le tante forme equivalenti di un rapporto, alcune sono più utilizzate di altre. Si tratta del:

- *rapporto unitario* usato per:
  - esprimere i prezzi rispetto al peso unitario;
  - per esprimere una lunghezza rispetto ad un segmento unitario, come ad esempio: circonferenza/ /diametro, apotema/lato;
  - per esprimere il peso rispetto al volume unitario (peso specifico delle sostanze);
  - per esprimere una forza rispetto ad una superficie unitaria (pressione atmosferica);
- *rapporto centesimale*, quando il riferimento è di 100 unità. Viene usato per esprimere: risultati statistici, variazioni avvenute nel tempo, gli sconti, gli interessi, ...;
- *rapporto trecentosessantesimale*, quando il riferimento è di 360 unità. Viene usato quando i dati vengono riferiti all'angolo giro, come nella costru-zione degli areogrammi a torta per esprimere situazioni statistiche che riguardano più parti di una stessa realtà.

In geometria i rapporti più utili vengono normalmente riferiti all'unità e vengono chiamati **costanti geometriche** o "**numeri fissi**".



Sulle linee a e b i numeri sono stati messi secondo il rapporto:

$$\frac{8}{6}$$

Se sulla linea b si raddoppia il valore 6, sulla linea a il corrispondente valore viene raddoppiato?

____

Se sulla linea b si dimezza il valore 6, sulla linea a il corrispondente valore viene dimezzato?

____

Traccia la linea che passa per il valore 1 della linea b. Il corrispondente valore sulla linea a si troverà compreso tra l'1 e il 2. In quale modo è possibile trovare il valore numerico corrispondente all'1 ?___________

____

____

Riassumendo, i rapporti tracciati risultano: $\frac{a}{b} = \frac{8}{6} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = \frac{?}{1}$

Essendo l'1 sulla linea b la sesta parte di 6, è esatto dire che *?* è la sesta parte di 8 ? __________

Allora : ***? = 8 : 6 parti = 1,333…*** è corretto ? ______________________________

fig. 439

Quando il rapporto è unitario, viene cioè riferito all'unità, il soggetto può essere anche scritto senza usare la frazione, cioè:

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{6} = \frac{1,333...}{1} = 1,333...$$

In conclusione ogni rapporto può essere espresso con un numero decimale, in questo caso si intende che quel valore è riferito all'unità.

Nella realtà questa convenzione è comunemente usata, come ad esempio:

$$3500\ Lit\ /\ Kg = \frac{3500\ Lit}{1\ Kg}$$

é il costo unitario del pane.

$$40\ Km\ /\ ora = \frac{40\ Km}{1\ ora}$$

é la velocità massima consentita per un motorino.

$$14\ Km\ /\ litro = \frac{14\ Km}{1\ litro}$$

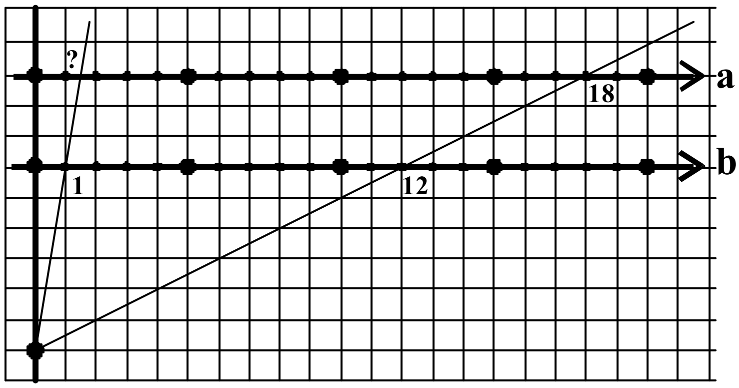
é il possibile consumo unitario che ha una macchina.

$$0,92\ Kg\ /\ dm^3 = \frac{0,92\ Kg}{1\ dm^3}$$

é il peso specifico dell'olio di oliva.

$$25,4\ mm\ /\ pollice = \frac{25,4\ mm}{1\ pollice}$$

é l'equivalenza fra le lunghezze mm e pollici.



Nel grafico è rappresentato il rapporto:

$$\frac{a}{b} = \frac{18}{12}$$

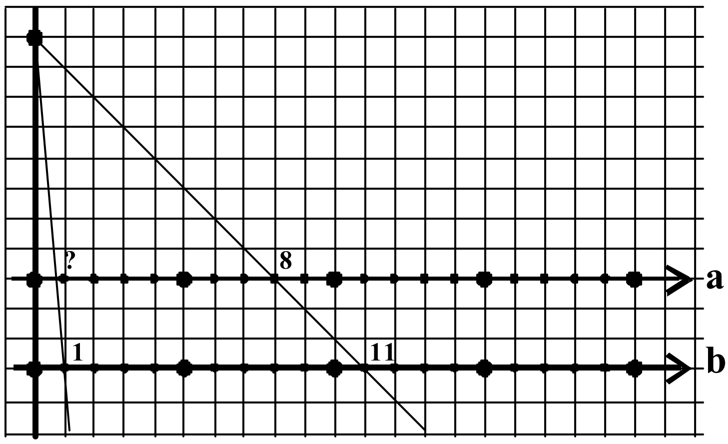
Se l'1 su b è la 12^ parte di 12, il valo-re corrispondente su a è la 12^ parte di 18. Trova questo valore:

? = ________________

Questo rapporto da quale numero de-cimale è rappresentato ?

$$\frac{a}{b} = \frac{18}{12} = \frac{\quad}{1} = \_\_\_\_\_\_\_$$

fig. 440



A fianco è rappresentato il rapporto:

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{11}$$

Trova il numero decimale corrisponden-te al rapporto unitario:

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{11} = \frac{\quad}{1} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

fig. 441

$\frac{a}{b}$ è un rapporto corrispondente ad un numero maggiore, minore o uguale a **1.**

Senza eseguire operazioni, completa la seguente tabella (eventualmente aiutati con i grafici):

		RAPPORTI						
		$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{21}{13}$
Numeri decimali	> 1	X						
che rappresentano	= 1							
i rispettivi rapporti	< 1							

fig. 442

Nei rapporti il soggetto viene chiamato, usando la terminologia matematica, *numeratore*, mentre il riferi-mento viene detto *denominatore*.
Se in un rapporto il numeratore è maggiore del denominatore, il numero decimale che lo rappresenta è **>, =** o **<** di **1**?

E se il numeratore è minore del denominatore?
E se il numeratore è uguale al denominatore?
Il numero usato per esprimere il rapporto unitario non è solo un fatto legato alla praticità di scrittura e di espressione, ma permette anche di comprendere me-glio la sostanza del rapporto.

Ad esempio, dire che il pane costa 3500 Lit/Kg permette di:
- giungere facilmente alla conclusione che il costo di 2 Kg di pane è di Lit 7000;
- fare immediatamente il confronto con il costo unita-rio praticato da un altro panettiere e quindi di deci-dere subito quale è il più conveniente. Si provi a pensare alla seguente situazione: *il 1° panettiere vende il pane al costo di Lit 34200 ogni 9 Kg, mentre il 2° panettiere vende lo stesso pane al costo di Lit 48200 ogni 13 Kg.* E' così immediato stabilire quale è il più conveniente?

Ma ci sono alcune realtà in rapporto che si possono comprendere meglio quando il riferimento non è l'unità. Ciò accade regolarmente quando le parti dell'unità perdono il loro significato logico. In tal caso l'immediata comprensione passa attraverso un riferimento più grande (come il 100 o il 1000,...).
Ad esempio, dire che 18 bambini su 24 alla mattina fanno colazione con il latte:
- risulta difficile da comprendere se si usa l'espres-sione: 0,75 bambini ogni 1 fanno colazione con il latte (ci si rifiuta di valutare 0,75 bambini una semplice considerazione numerica);
- è di immediata comprensione e accettabilità se si usa l'espressione: 75 bambini ogni 100 fanno colazione con il latte.

PROBLEMA:
Il rapporto fra le figurine che ha Aldo e quelle che ha Paolo viene espresso dal numero decimale 0,8. Ha più figurine Aldo o Paolo ?

Prima di dare la risposta completa la parte sottostante:

$$\frac{\textit{figurine di Aldo}}{\textit{figurine di Paolo}} = 0,8 = \frac{0,8}{1} = \frac{[\quad]?}{10}$$

cioè: se Paolo ha 10 figurine allora Aldo ha **[ ]** figurine.

$$\frac{\textit{figurine di Aldo}}{\textit{figurine di Paolo}} = 0,8 = \frac{0,8}{1} = \frac{[\quad]?}{5}$$

cioè: se Paolo ha 5 figurine allora Aldo ha **[ ]** figurine.

RISPOSTA: fra Aldo e Paolo ad avere più figurine è : ______________________

fig. 443

PROBLEMA:
Il triangolo rettangolo ABC ha i cateti AB e BC le cui lunghezze sono in rapporto 1,2. Quale dei due cateti è il più lungo ?

Prima di dare la risposta completa la parte sottostante:

$$\frac{AB}{BC} = 1,2 = \frac{1,2}{1} = \frac{[\quad]?}{10} = \frac{[\quad]?}{15}$$

Se il cateto BC è lungo 10 cm, quanti cm è lungo il cateto AB ? ______________________

Se il cateto BC è lungo 15 cm, quanti cm è lungo il cateto AB ? ______________________

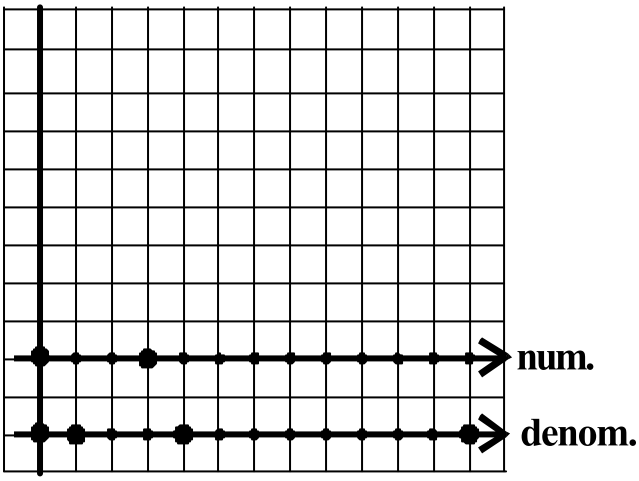
RISPOSTA: fra AB e BC il cateto più lungo è : ______________________

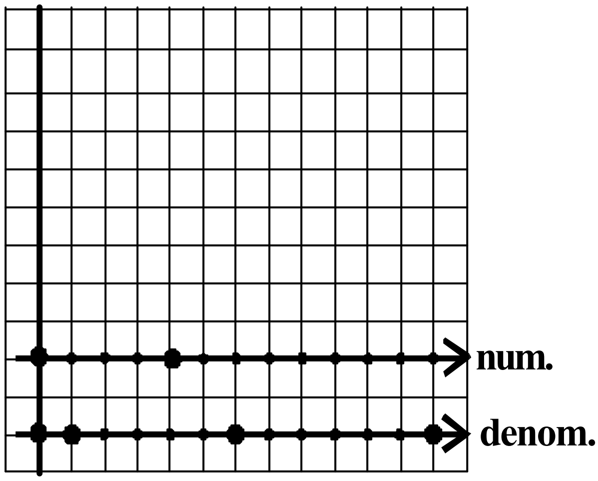
fig. 444

PROBLEMA:
Disegna con due grafici separati i rapporti 3/4 e 4/6. Dopo aver trovato i numeri decimali corrispondenti alle due frazioni, esprimi quale dei due rapporti è il maggiore.

Prima di iniziare la risoluzione del problema ricorda che:

- Due rapporti si possono confrontare e si può dire se uno è >, =, < dell'altro equiparando i rispet-tivi numeratori quando i denominatori sono uguali. Occorre quindi trovare rapporti equivalenti di uno e dell'altro aventi lo stesso denominatore.
- Un numero espresso con un numero decimale è riferito all'unità, è cioè un rapporto dove il denominatore è 1, anche se non è scritto.





$$\textit{rapporto}\ \frac{3}{4} = \frac{[\quad]?}{12} \qquad \textit{rapporto}\ \frac{4}{6} = \frac{[\quad]?}{12}$$

$$\textit{rapporto}\ \frac{3}{4} = \frac{[\quad]?}{12} \qquad \textit{rapporto}\ \frac{4}{6} = \frac{[\quad]?}{12}$$

$$\textit{rapporto}\ \frac{3}{4} = [\quad]? \qquad \textit{rapporto}\ \frac{4}{6} = [\quad]?$$

RISPOSTA:
Numero decimale corrispondente al rapporto 3/4 : ____________________

Numero decimale corrispondente al rapporto 4/6 : ____________________

Fra i due rapporti il maggiore è : ____________________

fig. 445

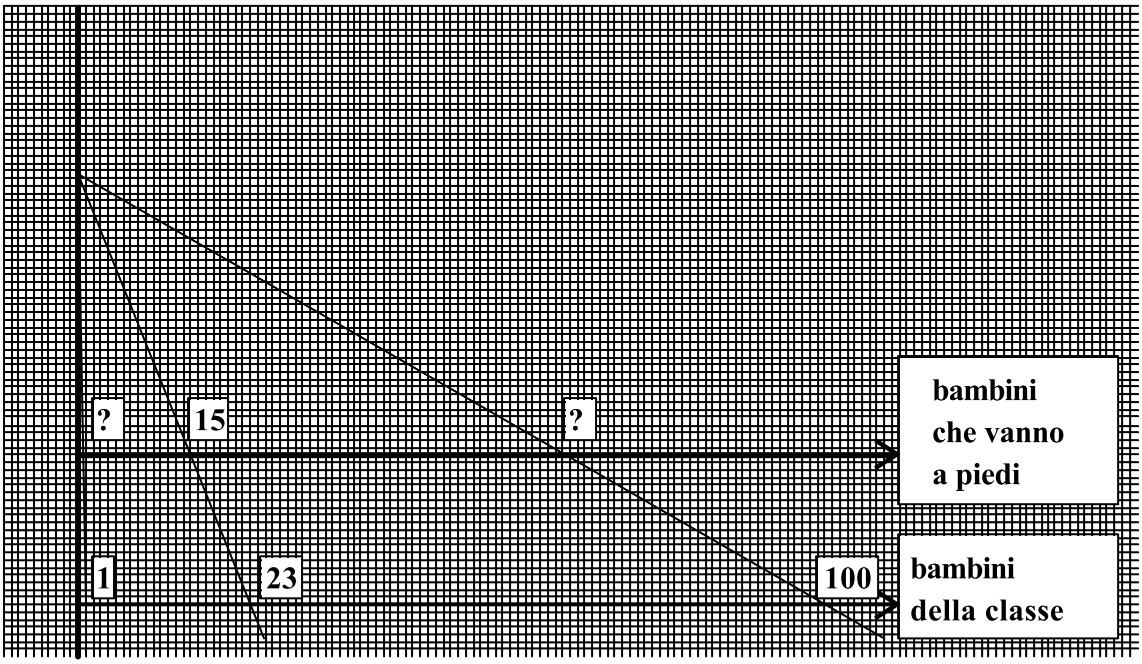
Le schede seguenti portano degli esempi su come può essere proposto il rapporto centesimale, cioè la percentuale.

PROBLEMA

In una classe di 23 bambini, 15 si recano a scuola a piedi. Rispondi alle seguenti domande:

- Quale è il rapporto fra quelli che vanno a piedi e tutti i bambini della classe?
- Quale è il numero decimale che esprime questi rapporto?
- Se la classe fosse stata formata da 100 bambini, quanti sarebbero stati i bambini che si sarebbero recati a scuola a piedi?

Prima di dare le risposte disegna il grafico sottostante e completa le richieste con gli opportuni valori numerici.



$$\frac{\textit{bambini che vanno a piedi}}{\textit{bambini della classe}} = \frac{[\quad]}{23} = \frac{[\quad]}{1} = [\quad]$$

$$\textit{ricordati che}: \frac{[\quad]}{100} = [\quad \%]$$

$$\frac{\textit{bambini che vanno a piedi}}{\textit{bambini della classe}} = \frac{[\quad]}{23} = \frac{[\quad]}{100} = [\quad \%]$$

RISPOSTA:

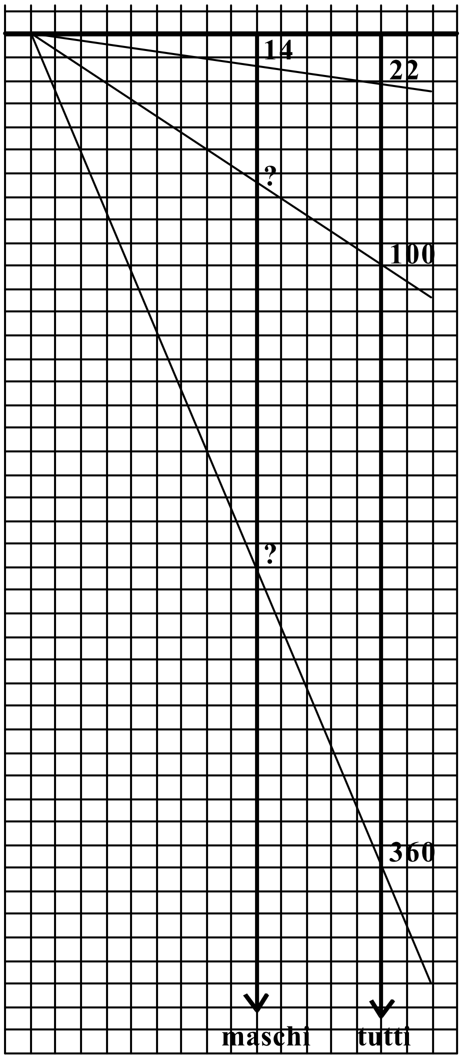
Il rapporto cercato è : ____________________

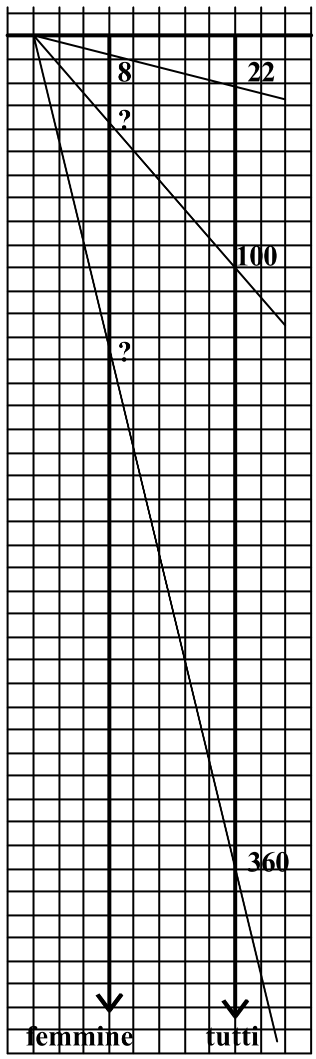
Il rapporto espresso con un numero decimale è : ____________________

Il rapporto riferito ai 100 bambini è (in %) : ____________________

fig. 446

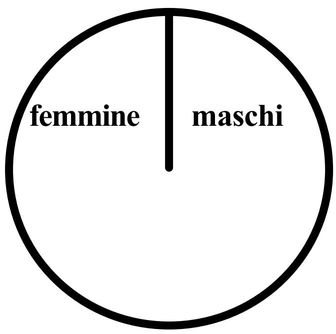
PROBLEMA:
In classe ci sono 14 maschi e 8 femmine. Calcola le percentuali della parte dei maschi e della parte delle femmine rispetto all'intera classe.
Rappresenta, poi, i risultati in un areogramma utilizzando i risultati ottenuti con i rapporti trecento-sessantesimali.





$$\frac{\textbf{\textit{maschi}}}{\textbf{\textit{tutti}}} = \frac{14}{22} = \frac{[\quad]}{1} = \frac{[\quad]}{100} = \frac{[\quad]}{360} \qquad \frac{\textbf{\textit{femmine}}}{\textbf{\textit{tutti}}} = \frac{8}{22} = \frac{[\quad]}{1} = \frac{[\quad]}{100} = \frac{[\quad]}{360}$$

RISPOSTA: i maschi sono il : _________% mentre le femmine sono il : _________%



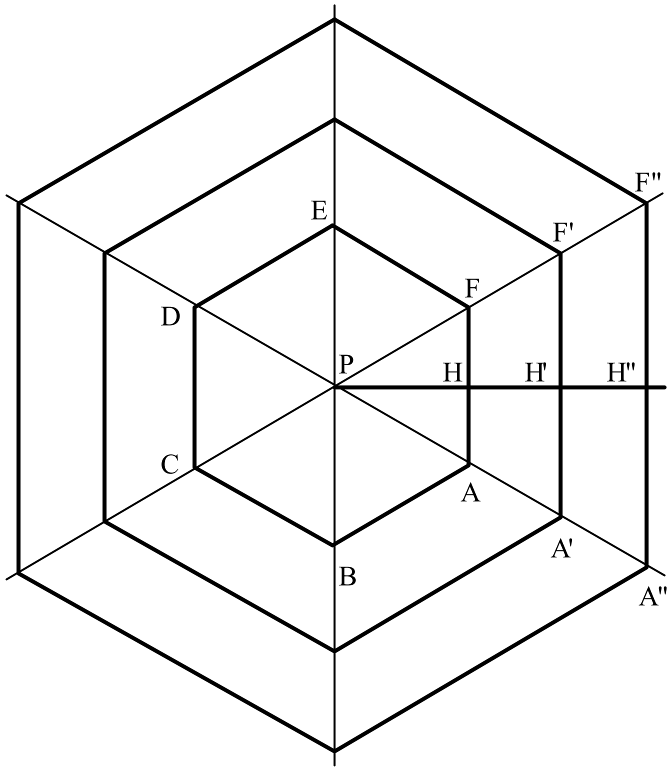
Usando il goniometro completa l'areogramma disegnato a fianco.

fig. 447

LE COSTANTI GEOMETRICHE

I numeri derivanti da rapporti fra lunghezze, fra aree, fra volumi, sono tanti e di diversa natura. *Quelli che rimangono costanti al variare delle dimensioni senza variare la forma, vengono chiamati costanti geometriche.*
Fra le costanti geometriche, quelle che interessano l'ambito della scuola elementare sono i rapporti tra:
- apotema e lato corrispondente nei poligoni regolari,
- area del cerchio e area del quadrato di lato il raggio del cerchio,
- lunghezza della circonferenza e lunghezza del diametro della stessa.

I rapporti fra apotemi e lati nei poligoni regolari



Nel disegno a fianco l'esagono regolare ABCDEF è stato poiettato negli omotetici esagoni regolari

A'B'C'D'E'F'

A"B"C"D"E"F"

utilizzando come centro della omotetia il punto P, che è anche il centro dell'eagono.

Rileva, con un righello millimetrato e con certa accuratezza, le misure dell'apotema e del lato di ogni esagono e completa i rapporti indicati sotto:

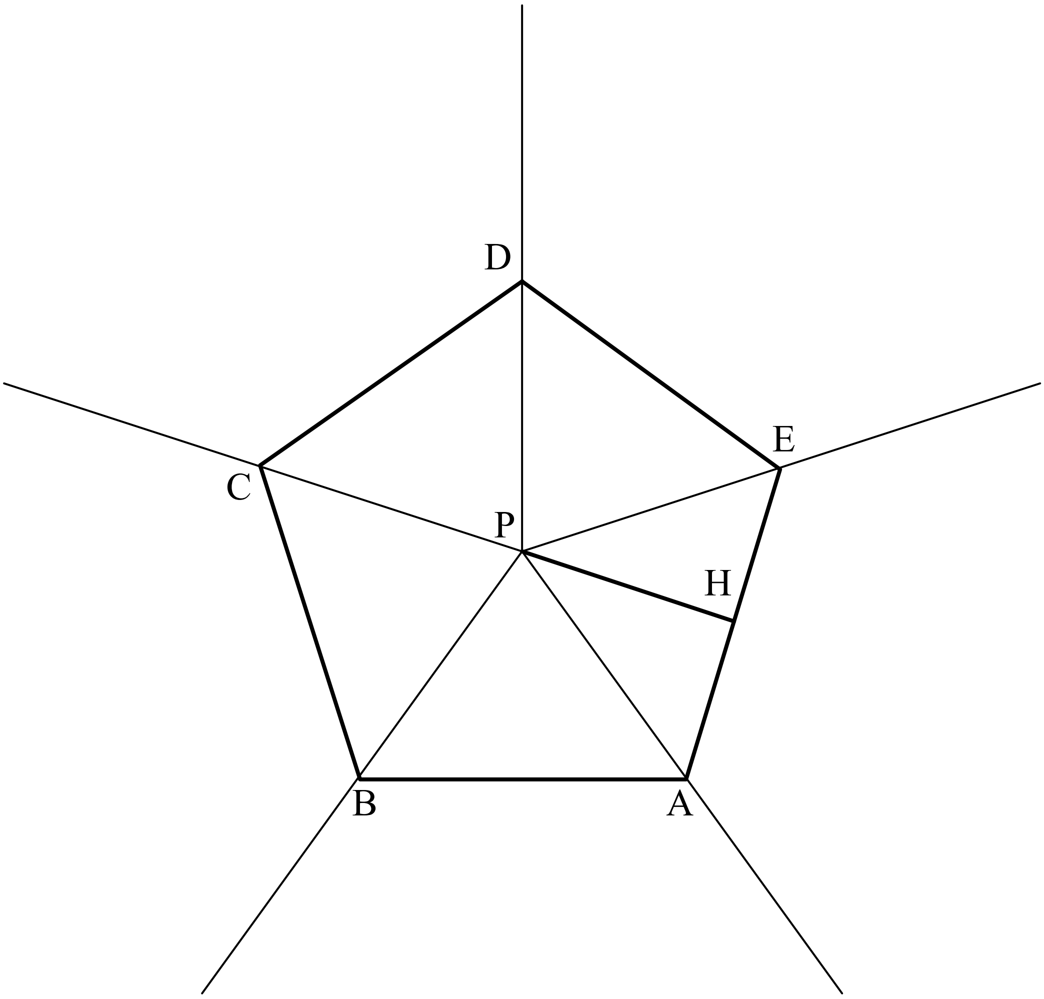
esagono ABCDEF : $\dfrac{\textit{apotema}}{\textit{lato}} = \dfrac{PH}{AF} = \dfrac{[\quad]}{[\quad]} = \dfrac{[\quad]}{1} = [\qquad]$

esagono A' B' C' D' E' F' : $\dfrac{\textit{apotema}}{\textit{lato}} = \dfrac{PH'}{A'F'} = \dfrac{[\quad]}{[\quad]} = \dfrac{[\quad]}{1} = [\qquad]$

esagono A" B" C" D" E" F" : $\dfrac{\textit{apotema}}{\textit{lato}} = \dfrac{PH''}{A''F''} = \dfrac{[\quad]}{[\quad]} = \dfrac{[\quad]}{1} = [\qquad]$

Calcolando fino alla terza cifra decimale si dovrebbe vedere che il rapporto fra apotema e lato rimane costante, anche se l'esagono cambia dimansione.
Se le misure sono state effettuate con la dovuta precisione il valore è una costante di tutti gli esagoni regolari e dovrebbe avvicinarsi a : **0,866**.

fig. 448



Sopra è stato disegnato un pentagono regolare. Trova il rapporto fra l'apotema e il lato:

pentagono ABCDE : $\dfrac{apotema}{lato} = \dfrac{PH}{AE} = \dfrac{[\quad]}{[\quad]} = \dfrac{[\quad]}{1} = [\qquad]$

Trasforma il pentagono ABCDE e l'apotema PH mediante una omotetia eseguita con centro in P e secondo il rapporto **3/2**. Chiama con A'B'C'D'E' il nuovo pentagono e con PH' il nuovo apotema.

pentagono A' B' C' D' E' : $\dfrac{apotema}{lato} = \dfrac{PH'}{A'E'} = \dfrac{[\quad]}{[\quad]} = \dfrac{[\quad]}{1} = [\qquad]$

Trasforma il pentagono ABCDE e l'apotema PH mediante una omotetia eseguita con centro in P e secondo il rapporto **2/1**.

pentagono A" B" C" D" E" : $\dfrac{apotema}{lato} = \dfrac{PH''}{A''E''} = \dfrac{[\quad]}{[\quad]} = \dfrac{[\quad]}{1} = [\qquad]$

Se le misure sono state fatte con cura, il valore è una costante di tutti i pentagoni regolari e dovrebbe avvicinarsi a : **0,688**.

fig. 449

Analoghi esercizi si propongono per gli altri poligoni regolari. I risultati dovrebbero avvicinarsi ai seguenti valori:

	apotema / lato
triangolo equil.	0,289
quadrato	0,5
pentagono	0,688

	apotema / lato
esagono	0,866
eptagono	1,038
ottagono	1,207

	apotema / lato
ennagono	1,374
decagono	1,539
dodecagono	1,866

Il rapporto fra la circonferenza e il suo diametro

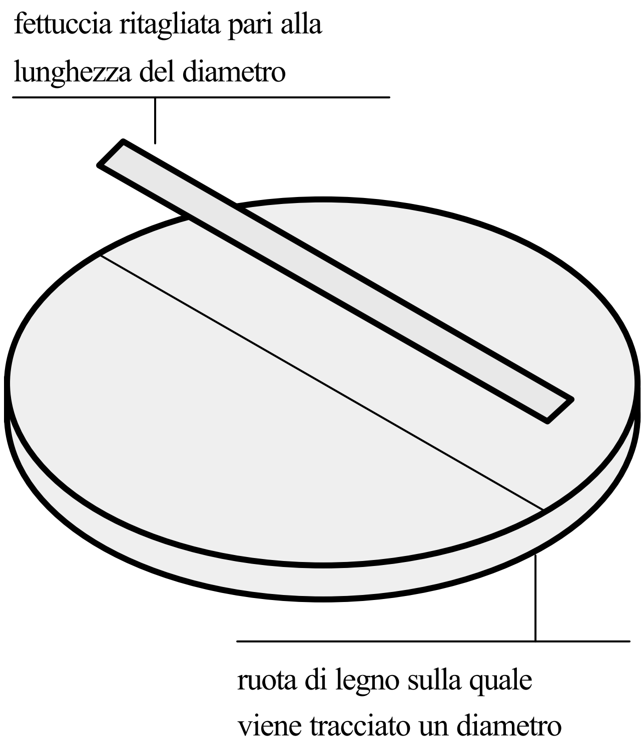


fig. 450

Per trovare il rapporto costante fra la lunghezza della circonferenza ed il diametro della stessa è necessario utilizzare tanti oggetti, a forma di cerchio, aventi uno spessore tale da permettere il contornamento con una fettuccia.

Sulla superficie di questi cerchi deve essere tracciato un diametro e il bambino deve prelevare la lunghezza del diametro mediante una fettuccia.
Questa fettuccia, usata come unità di misura, viene riportata consecutivamente più volte sul bordo del cerchio. Il bambino verificherà che la lunghezza del bordo (misura della circonferenza) è più di 3 diametri e meno di 4.
L'operazione va ripetuta con cerchi di varie dimen-sioni, in modo da arrivare alla conclusione che la circonferenza è di 3 diametri e un pezzetto di diametro.

Si tratta ora di trovare con precisione (almeno fino ai centesimi) quanto vale questo rapporto.
Con il metro a fettuccia si rilevano la misura della circonferenza (contornando il cerchio) e la misura del diametro. Tali misure vengono riportate in un'apposita tabella che poi verrà esaminata:

CERCHIO	MISURE	RAPPORTO UNITARIO	COSTANTE GEOMETRICA
1°	cfr = [ ] cm diametro = [ ] cm	[ ] / 1	[ ]
2°	cfr = [ ] cm diametro = [ ] cm	[ ] / 1	[ ]
3°	cfr = [ ] cm diametro = [ ] cm	[ ] / 1	[ ]

fig. 451

Data l'imprecisione degli strumenti di misura a disposizione, difficilmente si otterrà il valore esatto. Sarà compito dell'insegnante informare i bambini che, utilizzando strumenti di precisione, detto rapporto è di **3,14...**

Il rapporto fra il cerchio e il quadrato di lato il raggio

Il metodo usato per trovare il nuovo rapporto in esa-me (rapporto fra aree) *non può essere basato*:
- *sui ricoprimenti* (perché con un quadrato di lato il raggio non è possibile ricoprire esattamente un cerchio; il bambino potrà verificare che il cerchio è meno di 4 quadrati e più di uno. Usando due quadrati una parte del centro rimane non coperta e una parte fuoriesce dal cerchio).
- *sulle trasformazioni di equiestensione* (perché un cerchio non può essere trasformato in una forma equiestesa ricopribile mediante quadrati).

E' necessario perciò trovare un nuovo metodo. Fra i metodi accessibili al bambino, quello più immediato riconduce la metrica delle aree alla metrica dei pesi.

CORRISPONDENZA FRA AREA E PESO.

Si consideri una figura piana ritagliata da una tavola di legno. La figura ottenuta è un solido che ha per base la figura piana in oggetto e per altezza lo spessore del legno.
Utilizzando la stessa tavola, se si ritaglia una figura di superficie doppia, anche il volume si raddoppia. Si crea perciò una corrispondenza fra le aree delle basi dei solidi e i volumi degli stessi. Usando la stessa tavola e dando per scontato che il materiale sia omogeneo, se si raddoppia il volume, allora si rad-doppia anche il peso. Si ha perciò una corrispon-denza fra la metrica delle superfici di base e la metrica dei pesi.

Ab = area di base delle parti ritagliate,
h = altezza delle parti,
Vol = volume delle due parti,
Ps = peso specifico del materiale usato,
Peso = peso delle due parti.

$$\frac{Ab_1}{Ab_2} = \frac{Ab_1 \times h}{Ab_2 \times h} = \frac{Vol_1}{Vol_2} = \frac{Vol_1 \times Ps}{Vol_2 \times Ps} = \frac{Peso_1}{Peso_2}$$

E' possibile allora, in queste condizioni, utilizzare la bilancia per arrivare a conclusioni che riguardano le aree.

Si ritagliano dalla tavola un cerchio e quattro quadrati aventi per lato il raggio del cerchio. Su di una bilancia a due piatti si pongono, da una parte il cerchio e dall'altra:
- 1 quadrato: il cerchio è più pesante del quadrato, quindi è più grande di 1 quadrato;
- 2 quadrati: il cerchio è più grande di due quadrati;

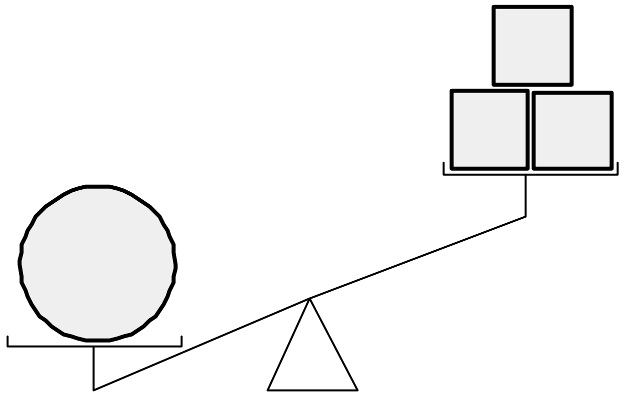


fig. 452

- 3 quadrati: il cerchio è più grande di tre quadrati;

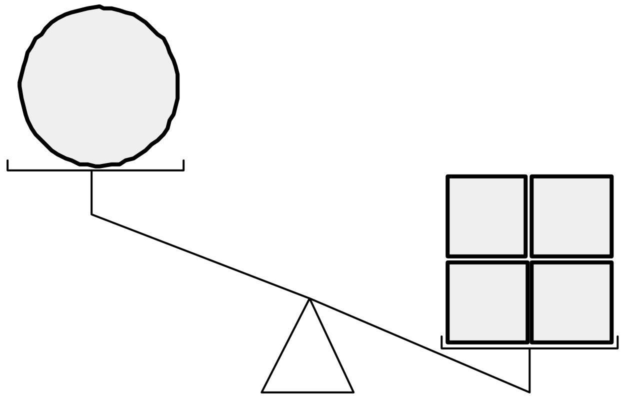


fig. 453

- 4 quadrati: il cerchio è meno grande di 4 quadrati.

1^ CONCLUSIONE: *il cerchio è più di 3 e meno di 4 quadrati.*

Si toglie il quarto quadrato aggiunto e lo si suddivide in dieci strisce uguali:

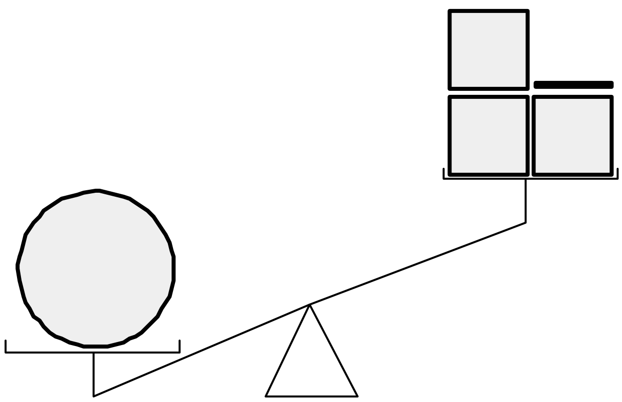


fig. 454

- 3 quadrati più 1 striscia (decimo di quadrato): il cer-chio è più grande di 3,1 quadrati;

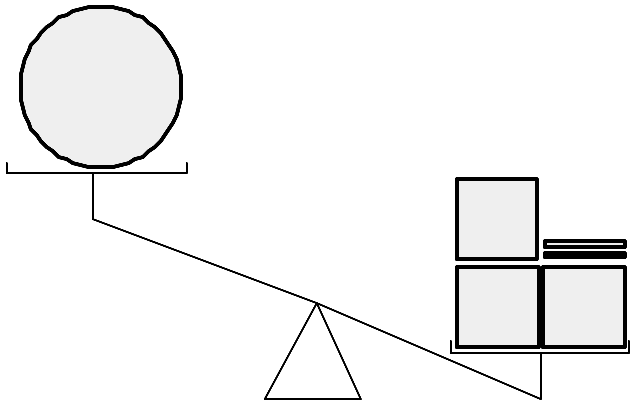


fig. 455

- 3 quadrati più 2 strisce: il cerchio è meno grande di 3,2 quadrati.

2^ CONCLUSIONE: *il cerchio è più di 3,1 quadrati e meno di 3,2 quadrati*.

Si toglie la seconda striscia e la si suddivide in dieci quadretti (centesimi del quadrato di partenza):

- 3 quadrati, 1 striscia e 1 quadratino: il centro è più grande di 3,11 quadrati
- ...
- ...

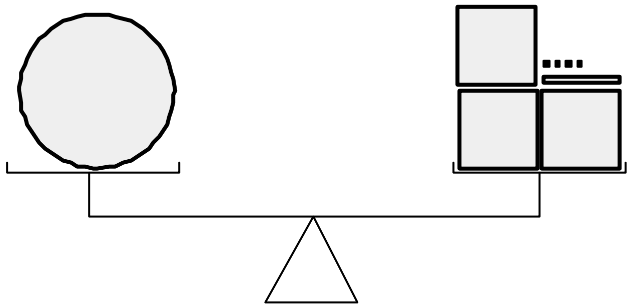


fig. 456

- 3 quadrati, 1 striscia e 4 quadratini: si raggiunge un sostanziale equilibrio dei piatti della bilancia.

Si giunge alla conclusione che *un cerchio è equivalente a 3 quadrati più 1 striscia più 4 quadratini, cioè 3,14 quadrati di lato il raggio*:

$$\frac{1 cerchio di raggio R}{1 quadrato di lato R} = \frac{3,14 quadrati}{1 quadrato} = 3,14$$

quindi:

$$1 cerchio di raggio R = 3,14 quadrati di lato R = 3,14 \times (R \times R) = 3,14 \times R^2$$